Skript für Übungsstunden MAT 183

Stochastik für die Naturwissenschaften

Drucken Sie diese Unterlagen einseitig aus!
Eine Seite pro A4-Blatt.

Es ist sehr sinnvoll, wenn Sie schon vor der Übungsstunde am vorgesehenen Platz versuchen, die beiden Aufgaben zu lösen.

Tipps für die Studis

- Vorlesung und Übung ergänzen sich und sollen gemeinsam bei den Studierenden wirkliches Verstehen des Stoffes bewirken. Die Vorlesung bietet im allgemeinen Überblicks- und Orientierungswissen auf einem hohen Abstraktionsniveau. Dies und die häufig frontale Form laden zum passiven Lernen und damit zum Oberflächenlernen ein. Übungen können die abstrakten Inhalte der Vorlesung vertiefen und konkretisieren, indem sie Anwendungen anbieten. Die Studierenden können sich aktiv mit den Inhalten der Vorlesung auseinandersetzen. Übungen bieten die Chance zum aktiven Lernen.
- Lernen müssen Sie nach der Vorlesung erstmal selber in aller Ruhe. Auch die Übungen versuchen Sie zuerst selber in aller Ruhe. Erst danach treffen Sie Ihre Mitstudis und besprechen die Übungen gemeinsam.
- Der Tendenz nach werden die Aufgaben zu einem Gebiet immer leicht schwieriger, entlang folgender Kaskade: 1. Aufgaben in der Vorlesung, 2. Aufgaben im Übungsskript, 3. Übungsaufgaben, welche abzugeben sind, 4. Prüfungsaufgaben. Damit der Lerneffekt am Besten ist, sollten Sie deshalb im Zeitablauf genau so den Stoff lernen und keine Etappe auslassen!
- Wie sollte man Übungen lösen:
  - zuerst immer selber probieren
  - falls nicht geht: im Storrer hat es zu jedem Kapitel viele Übungen mit Lösungen, üben Sie zuerst dort!
  - falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen
  - falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen
  - falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!)
- Verbesserungen bitte an abigail.sutton@math.uzh.ch

Blatt 2

(Beschreibende Statistik & Grundbegriffe Wahrscheinlichkeitsrechnung, Skript Kapitel 1 + 2)

Lernziele: Sie können

- Aufgaben aus der Kombinatorik lösen.
- die korrekte Skala von Merkmalen bestimmen.
- Lage- und Streumasse von Daten berechnen.

Vorwissen:

Auf wieviele Arten kann man n Objekte in eine Folge anordnen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt?

Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus n Objekten $k, k \leq n$, herauszugreifen und in eine Folge anzuordnen, wobei die Reihenfolge eine Rolle spielt?

Gegeben sind n Objekte. Wieviele Folgen der Länge r kann man bilden, falls jedes Objekt beliebig oft gewählt werden darf?

Es sei eine Menge von n Elementen gegeben. Wieviele Teilmengen von k Elementen gibt es?

Beschreibende Statistik:

4 Arten von Skalen:

-	-
-	-

Lagemasse:

- Durchschnitt:

- Modus: Wert, welcher

- Median:
  Teilt in zwei gleiche Hälften.

Streuungsmasse:

- Varianz:

- Standardabweichung:

- Variationsbreite:
  Differenz zwischen dem

- Interdezilbereich: Variationsbreite, nachdem man die kleinsten sowie grössten 10% der Daten ignoriert.

<u>Zur Unterstützung:</u>

Storrer, Kapitel 29 - 31, 48
Storrer, Seite 8 (Zusammenfassung Skalen)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) In einer Verhaltensstudie werden vier Tieren je eine von sechs Aufgaben zugeteilt. Auf wieviele Arten kann das geschehen, wenn die gleiche Aufgabe i) wiederholt, ii) höchstens einmal vorkommen darf?

b) Eine Klasse hat 18 SchülerInnen. i) Zwecks Reklamation beim Rektor soll eine Viererdelegation bestimmt werden. Wieviel Möglichkeiten gibt es? ii) In derselben Klasse werden jede Woche vier Ämtli neu bestimmt (Tafelwart, Klassenbuchträgerin etc.). Auf wieviele Arten geht das?

c) Der gemischte Chor eines Dorfes besteht aus 20 Frauen und 10 Männern. Der Vorstand umfasst 6 Mitglieder, wovon statutengemäss 4 Frauen und 2 Männer sein müssen. Auf wieviele Arten könnte man diesen Vorstand auswählen?

d) Auf wieviele Arten können 8 Personen in einer Bar an eine Theke (mit 8 Barhockern) sitzen? Auf wieviele Arten können 8 Personen um einen runden Tisch (mit 8 Stühlen) sitzen? Thematisieren Sie den Unterschied der beiden Aufgabenstellungen.

Lösung Aufgabe 1:

a) In einer Verhaltensstudie werden vier Tieren je eine von sechs Aufgaben zugeteilt. Auf wieviele Arten kann das geschehen, wenn die gleiche Aufgabe i) wiederholt, ii) höchstens einmal vorkommen darf?

b) Eine Klasse hat 18 SchülerInnen. i) Zwecks Reklamation beim Rektor soll eine Viererdelegation bestimmt werden. Wieviel Möglichkeiten gibt es? ii) In derselben Klasse werden jede Woche vier Ämtli neu bestimmt (Tafelwart, Klassenbuchträgerin etc.). Auf wieviele Arten geht das?

c) Der gemischte Chor eines Dorfes besteht aus 20 Frauen und 10 Männern. Der Vorstand umfasst 6 Mitglieder, wovon statutengemäss 4 Frauen und 2 Männer sein müssen. Auf wieviele Arten könnte man diesen Vorstand auswählen?

d) Auf wieviele Arten können 8 Personen in einer Bar an eine Theke (mit 8 Barhockern) sitzen? Auf wieviele Arten können 8 Personen um einen runden Tisch (mit 8 Stühlen) sitzen? Thematisieren Sie den Unterschied der beiden Aufgabenstellungen.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:
Zwanzig Studentinnen und Studenten absolvieren eine Prüfung, in welcher maximal 12 Punkte erziehlt werden konnten und erreichten dabei folgende Resultate:

$$6, 8, 3, 10, 1, 12, 3, 12, 7, 5, 10, 9, 6, 6, 11, 7, 6, 10, 9, 7.$$

a) Zeichnen Sie das Stabdiagramm.

b) Stellen Sie die Summenhäufigkeitsverteilung graphisch dar.

c) Berechnen Sie für obige Daten 1) Durchschnitt, 2) Median, 3) Interdezilbereich, 4) Varianz, 5) Standardabweichung.

Lösung Aufgabe 2:
Zwanzig Studentinnen und Studenten absolvieren eine Prüfung, in welcher maximal 12 Punkte erziehlt werden konnten und erreichten dabei folgende Resultate:

$$6, 8, 3, 10, 1, 12, 3, 12, 7, 5, 10, 9, 6, 6, 11, 7, 6, 10, 9, 7.$$

a) Zeichnen Sie das Stabdiagramm.

b) Stellen Sie die Summenhäufigkeitsverteilung graphisch dar.

c) Berechnen Sie für obige Daten 1) Durchschnitt, 2) Median, 3) Interdezilbereich, 4) Varianz, 5) Standardabweichung.

Blatt 3
(Wahrscheinlichkeit, Skript Kapitel 3)

Lernziele: Sie können

- den Ereignisraum sowie Ereignisse eines Zufallsexperiments aufstellen.
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen ausrechnen.
- mit den Rechenregeln umgehen und diese korrekt anwenden.

Vorwissen:

Arten von Wahrscheinlichkeiten:

- $p = \underline{\hspace{6cm}}$

- idealisierte relative Häufigkeit

- $p = \underline{\hspace{4cm}}$

Ereignisraum $\Omega =$ Menge

eines Zufallsexperiments.

Ein **Ereignis** E ist

Rechenregeln:

E und F sind **unvereinbar (=disjunkt)**, falls gilt:

$P[A \cup B] =$

$P[E \cup F] = P[E] + P[F]$ gilt, falls

$P(\overline{E}) =$ mit $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|}$ (falls Ω Laplace-Raum)

Welche 3 Eigenschaften müssen alle Wahrscheinlichkeiten erfüllen?

- für alle E.

-

- Für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise unvereinbare Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ gilt:

Zur Unterstützung:

Storrer, Kapitel 32 - 35
Storrer, Seite 45 + 46 (Zusammenfassung Wahrscheinlichkeit)
Storrer, Seite 49 + 70 (Überblick Ereignisse)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) Bei einem Tennismatch mit Spielerinnen A und B gewinnt die Spielerin, die zuerst zwei Sätze für sich entschieden hat. Geben Sie den Ereignisraum Ω an sowie die Ereignisse E: "Spielerin B gewinnt den Match" und F: "Der Match geht über drei Sätze".
Was bedeuten die Ereignisse $E \cap F, \overline{E} \cup F$ und $(E \cup F) \setminus (E \cap F)$ in Worten?

b) Ein fleissiger Wahrscheinlichkeitsrechner hat 30 Kugeln mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 30 beschriftet und in ein Behältnis getan. Daraus wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie eine Quadratzahl?

c) In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff drei Stifte heraus. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: A: "Genau einer der Farbstifte ist rot", B: "mindestens ein Farbstift ist blau".

Lösung Aufgabe 1:

a) Bei einem Tennismatch mit Spielerinnen A und B gewinnt die Spielerin, die zuerst zwei Sätze für sich entschieden hat. Geben Sie den Ereignisraum Ω an sowie die Ereignisse E: "Spielerin B gewinnt den Match" und F: "Der Match geht über drei Sätze".
Was bedeuten die Ereignisse $E \cap F, \overline{E} \cup F$ und $(E \cup F)\backslash(E \cap F)$ in Worten?

b) Ein fleissiger Wahrscheinlichkeitsrechner hat 30 Kugeln mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 30 beschriftet und in ein Behältnis getan. Daraus wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie eine Quadratzahl?

c) In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff drei Stifte heraus. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: A: "Genau einer der Farbstifte ist rot", B: "mindestens ein Farbstift ist blau".

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Zwei Zahlen x, y mit $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ werden willkürlich gewählt. Stellen Sie die folgenden Ereignisse graphisch dar:

a) Ω, b) $A : y \leq x$, c) $B : y \geq (x-1)^2$, d) $A \cap B$.

Berechnen Sie ferner die geometrischen Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

Lösung Aufgabe 2:

Zwei Zahlen x, y mit $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ werden willkürlich gewählt. Stellen Sie die folgenden Ereignisse graphisch dar:

a) Ω, b) $A : y \leq x$, c) $B : y \geq (x-1)^2$, d) $A \cap B$.

Berechnen Sie ferner die geometrischen Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

Blatt 4
(Bedingte Wahrscheinlichkeit & Unabhängigkeit, Skript Kapitel 3)

Lernziele: Sie können
- bedingte Wahrscheinlichkeits-Aufgaben erkennen und korrekt ausrechnen.
- die Unabhängigkeit von Ereignissen überprüfen wie auch anwenden.

Vorwissen:

Formel bedingte Wahrscheinlichkeit:

weitere Formeln:

$P[A|B]P[B] = P[A \cap B] = P[B|A]P[A]$

$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B|A]P[A] + P[B|\overline{A}]P[\overline{A}]}$$

unabhängig:

A und B sind (paarweise) unabhängig voneinander, wenn gilt

Beispielaufgabe:

Gegeben sind zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $P(A) = 0.4$ und $P(B) = 0.5$. Welche Aussagen sind wahr, welche Aussagen falsch?

1. $P(A \cup B) = 0.9$
2. $P(A|B) = 0.4$
3. $P(A \cap B) = 0.25$
4. $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
5. $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$

Lösung:

Richtig sind die Aussagen

Falsch sind die Aussagen

<u>Zur Unterstützung:</u>

Storrer, Kapitel 36
Storrer, Seite 84 (Überblick)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) Von 500 Personen waren 300 gegen eine Krankheit geimpft. Von den geimpften erkrankten 50 Personen, von den ungeimpften dagegen 100. Aus dieser Schar wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit I bzw. N bezeichnen wir die Ereignisse "geimpft" bzw. "nicht geimpft", mit K bzw. G die Ereignisse "erkrankt" bzw. "gesund geblieben". Berechnen Sie $P(I)$, $P(G)$, $P(K)$, $P(G \cap I)$, $P(I|G)$, $P(G|I)$.

b) Sie wollen testen, ob ein Student des Wirtschaftsstudiums fähig ist. Sie wissen, dass in der Bevölkerung 5% tauglich sind. Sie lassen einen Einstufungstest schreiben, der in 70% der Fälle einen tauglichen Student als tauglich klassifiziert und in 30% einen untauglichen als tauglich klassifiziert.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als tauglich eingestufter Student tatsächlich tauglich ist?

Lösung Aufgabe 1:

a) Von 500 Personen waren 300 gegen eine Krankheit geimpft. Von den geimpften erkrankten 50 Personen, von den ungeimpften dagegen 100. Aus dieser Schar wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit I bzw. N bezeichnen wir die Ereignisse "geimpft" bzw. "nicht geimpft", mit K bzw. G die Ereignisse "erkrankt" bzw. "gesund geblieben". Berechnen Sie $P(I)$, $P(G)$, $P(K)$, $P(G \cap I)$, $P(I|G)$, $P(G|I)$.

b) Sie wollen testen, ob ein Student des Wirtschaftsstudiums fähig ist. Sie wissen, dass in der Bevölkerung 5% tauglich sind. Sie lassen einen Einstufungstest schreiben, der in 70% der Fälle einen tauglichen Student als tauglich klassifiziert und in 30% einen untauglichen als tauglich klassifiziert.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als tauglich eingestufter Student tatsächlich tauglich ist?

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Wir würfeln mit einem roten und einem blauen Würfel. Mit E bezeichnen wir das Ereignis "der rote Würfel zeigt eine gerade Zahl", mit F das Ereignis "beide Würfel zeigen diesselbe Zahl". Sind E und F unabhängig?

Lösung Aufgabe 2:

Wir würfeln mit einem roten und einem blauen Würfel. Mit E bezeichnen wir das Ereignis "der rote Würfel zeigt eine gerade Zahl", mit F das Ereignis "beide Würfel zeigen diesselbe Zahl". Sind E und F unabhängig?

Blatt 5

(Diskrete Zufallsgrössen, Binomialverteilung, Skript Kapitel 4)

Lernziele: Sie können

- Wahrscheinlichkeiten einer allgemeinen, diskreten Zufallsgrösse berechnen.
- Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgrösse berechnen.
- die Verteilung sowie Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgrösse angeben.

Vorwissen:

Die **Binomialverteilung** tritt in folgenden Situationen auf:

- Experiment mit .

- wird .

- einzelnen Versuche sind unabhängig voneinander.

- mit Erfolgswahrscheinlichkeit p (eines einzelnen Versuchs).

Die **Verteilung** einer diskreten Zufallsgrösse können wir angeben als

- Wahrscheinlichkeitsfunktion,

  (Bemerkung Notation: $P[X = x_i] = p_i$)

-

- Stabdiagramm,

- Verteilungsfunktion.

Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgrösse:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i]$$

wobei die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsgrösse X ist.

Bemerkung:

Wir benutzen im diskreten Fall $P[X = k]$ und nicht $f(k)$.
f ist für die stetigen Zufallsgrössen reserviert.

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$P\left[X = k\right] =$

Zur Unterstützung:

Storrer, Kapitel 37.2 - 37.8, 38.2 - 38.3, 38.5
Storrer, Seite 108 (Überblick diskrete Zufallsgrossen)
Storrer, Seite 143 (Überblick Binomialverteilung)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) Wir würfeln mit einem fairen Würfel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 12 Würfen genau zweimal eine Sechs erscheint.

b) Bei einem Multiple-Choice-Test werden vier Fragen mit je drei und eine Frage mit nur zwei möglichen Antworten gestellt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei völlig zufälligem Ankreuzen drei richtig zu beantworten?

Lösung Aufgabe 1:

a) Wir würfeln mit einem fairen Würfel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 12 Würfen genau zweimal eine Sechs erscheint.

b) Bei einem Multiple-Choice-Test werden vier Fragen mit je drei und eine Frage mit nur zwei möglichen Antworten gestellt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei völlig zufälligem Ankreuzen drei richtig zu beantworten?

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Ein Würfelspiel: Wir würfeln mit zwei Würfeln. Sind die beiden Augenzahlen gleich, so ist der Gewinn X gleich dieser Augenzahl, also Fr. 1.- bis Fr. 6.-. Andernfalls ist der Gewinn gleich der Differenz zwischen der grösseren und der kleineren Augenzahl. Geben Sie die Verteilung von X an a) durch eine Tabelle, b) durch ein Stabdiagramm. c) Wie gross ist $P(X \leq 3)$?

Lösung Aufgabe 2):

Ein Würfelspiel: Wir würfeln mit zwei Würfeln. Sind die beiden Augenzahlen gleich, so ist der Gewinn X gleich dieser Augenzahl, also Fr. 1.- bis Fr. 6.-. Andernfalls ist der Gewinn gleich der Differenz zwischen der grösseren und der kleineren Augenzahl. Geben Sie die Verteilung von X an a) durch eine Tabelle, b) durch ein Stabdiagramm. c) Wie gross ist $P(X \leq 3)$?

Blatt 6

(Stetige Zufallsgrössen, Skript Kapitel 4)

Lernziele: Sie können

- den Zusammenhang zwischen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion erklären.
- die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse bestimmen.
- Wahrscheinlichkeiten einer stetigen Zufallsgrösse berechnen.

Vorwissen:

Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgrösse X:

$$F_X(a) := P[X \leq a] =$$

wobei für die **Dichtefunktion** gilt:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$,

- $f \geq 0$,

- stückweise stetig auf $\mathbb{R}$.

$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = P[a < X < b] = P[a \leq X < b]$

$= P[X \leq b] - P[X \leq a] =$.

Denn bei stetigen Zufallsgrössen gilt:

$P[X = x_0] = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx =$.

$P[X \leq x] = F(x)$.

$P[X > x] =$

Analogien: (W'keitsfunktion / Dichte $\xrightarrow{?}$ Verteilungsfunktion)

<u>diskret:</u> $P[X = x_i] = p_i \longrightarrow F(x) = P[X \leq x]$ (mit Sprüngen)

<u>stetig:</u> $f(x) \longrightarrow F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty} f(u)du$ (stetig)

<u>Zur Unterstützung:</u>

Storrer, Kapitel 40.2 - 40.5
Storrer, Seite 163 (Überblick stetige Zufallsgrössen)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) Wie muss man die Zahl a wählen, damit

$$f(x) = ax^{-2},\ x \in [2, \infty)$$

eine Dichtefunktion wird? Die zugehörige stetige Zufallsgrösse nennen wir X.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeit $p = P(1.5 \leq X \leq 3)$ graphisch dar.

c) Berechnen Sie p.

Lösung Aufgabe 1:

a) Wie muss man die Zahl a wählen, damit

$$f(x) = ax^{-2},\ x \in [2, \infty)$$

eine Dichtefunktion wird? Die zugehörige stetige Zufallsgrösse nennen wir X.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeit $p = P(1.5 \leq X \leq 3)$ graphisch dar.

c) Berechnen Sie p.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

a) **Prüfungsaufgabe von FS14:**
Sei X eine exp(2)-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[1 \leq \sqrt{X} \leq 2]$.

b) Sei X eine $U[3,6]$-Zufallsgrösse. Finden sie a, sodass $P[X \geq a] = 0.4$

Lösung Aufgabe 2):

a) **Prüfungsaufgabe von FS14:**
   Sei X eine exp(2)-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[1 \leq \sqrt{X} \leq 2]$.

b) Sei X eine $U[3, 6]$-Zufallsgrösse. Finden sie a, sodass $P[X \geq a] = 0.4$

Blatt 7

(Erwartungswert und Varianz, Skript Kapitel 5)

Lernziele: Sie knnen

- Erwartungswert und Varianz einer diskreten Zufallsgrösse berechnen.
- Erwartungswert und Varianz einer stetigen Zufallsgrösse berechnen.
- mit den Formeln für Erwartungswert und Varianz umgehen.

Vorwissen:

Erwartungswert

$$E[X] := \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \\ & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Varianz

$$V[X] := \begin{cases} \sum_{x_i} (x_i - \mu_X)^2 P[X = x_i] & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx & X \text{ stetig} \end{cases}$$

Standardabweichung (sd)

$$sd[X] := \sqrt{V[X]} \geq 0$$

Linearität des Erwartungswertes

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$,

$E[aX+bY] = \qquad\qquad\qquad$,

$E[b] = \qquad$,

$V[aX] = a^2 V[X]$,

$V[aX+b] = \qquad\qquad\qquad$,

$V[X] =$

$$\text{mit } E[X^2] = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Falls $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ gilt: $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$.

Zur Unterstützung:

Storrer, Kapitel 37.9 - 37.12, 38.4, 40.6-40.9, 41.2

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1: (Prüfungsaufgabe FS13:)

Eine Zufallsgrösse X nehme die folgenden 3 Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an (mit $p(n) := P[X = n]) : p(2) = 0.3, p(3) = 0.4, p(5) = 0.3$.

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion genau an und machen Sie dazu eine vollständige Skizze.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$..

c) Berechnen Sie $E[X^2]$.

d) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.

Lösung Aufgabe 1:

Eine Zufallsgrösse X nehme die folgenden 3 Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an (mit $p(n) := P[X = n]) : p(2) = 0.3, p(3) = 0.4, p(5) = 0.3$.

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion genau an und machen Sie dazu eine vollständige Skizze.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$..

c) Berechnen Sie $E[X^2]$.

d) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2: (Prüfungsaufgabe FS12:)

Eine Zufallsgrösse X habe Dichte Kx auf [0,5] und sei 0 sonst.

a) Berechnen Sie K.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an; machen Sie dazu auch eine exakte Skizze.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und den Median.

d) Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.

e) Berechnen Sie $P[X > -1.5]$ und $P[X > 4]$.

Lösung Aufgabe 2):

Eine Zufallsgrösse X habe Dichte Kx auf [0,5] und sei 0 sonst.

a) Berechnen Sie K.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an; machen Sie dazu auch eine exakte Skizze.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und den Median.

d) Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.

e) Berechnen Sie $P[X > -1.5]$ und $P[X > 4]$.

Blatt 8
(Ausgewählte Verteilungen & Z-Transformation, Skript Kapitel 6)

Lernziele: Sie können
- die passende Verteilung sowie deren Parameter angeben.
- für jede dieser Verteilungen Wahrscheinlichkeiten korrekt ausrechnen.
- Z-Transformation und Standardnormal-Tabelle richtig einsetzen.

Vorwissen:

Diskrete Verteilungen: (siehe Skript Kapitel 6)

- Bernoulli-Verteilung Be(p) $\mu =$ $\sigma^2 =$

- Binomial-Verteilung Bin(n, p) $\mu =$ $\sigma^2 =$

- Geometrische-Verteilung Ge(p) $\mu =$ $\sigma^2 =$

- Poisson-Verteilung Po(λ) $\mu =$ $\sigma^2 =$

Stetige Verteilungen: (siehe Skript Kapitel 6)

- Uniform-Verteilung $U[a, b]$ $\mu =$ $\sigma^2 =$

- Exponential-Verteilung Exp(λ) $\mu =$ $\sigma^2 =$

- Standardnormal-Verteilung $\mu = 0$ $\sigma^2 = 1$

- Chiquadrat-Verteilung χ_n^2 $\mu =$ $\sigma^2 =$

- F-Verteilung $F_{m,n}$ $\mu = \frac{n}{n-2}$ falls $n > 2$ $\sigma^2 =$

- t-Verteilung t_n $\mu = 0$ falls $n > 1$ $\sigma^2 = \frac{n}{n-2}$ falls $n > 2$

Z-Transformation $\quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \to \quad \rule{2cm}{0.4pt} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Wie berechnen wir Wahrscheinlichkeiten für folgende stetige Zufallsgrössen?

- exponentialverteilt:

- uniformverteilt:

- normalverteilt:

- t-verteilt:

- F-verteilt:

- χ^2-verteilt:

<u>Zur Unterstützung:</u>

Storrer, Kapitel 41.3 - 41.7
Storrer, Seite 361 (Standardnormal-Tabelle)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die jeweils passende Verteilung sowie deren Parameter!

a) Sie wollen bei einem verdächtigen Würfel testen, ob die 6 nicht zu selten vorkommt. Sie definieren dazu die Zufallsgrösse W: Anzahl Würfe, bis die erste 6 erscheint.
Nennen Sie die passende Verteilung von W und geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, falls man im Durchschnitt den Würfel acht Mal werfen muss bis zur ersten 6.

b) Ein Freund behauptet, er könne bei einer geworfenen Münze den Ausgang vorhersagen. Sie glauben ihm nicht und machen folgenden Test. Eine Münze wird acht Mal geworfen und Sie zählen, wie oft der Freund den Ausgang korrekt vorhersagt (=Zufallsgrösse X).
Um was für eine Verteilung handelt es sich bei diesem Experiment? Geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, falls der Freund im Schnitt in 8 Versuchen 5 mal richtig liegt.

c) Sie müssen von einer radioaktiven Probe die Anzahl Zerfälle in den nächsten 10 Sekunden aufschreiben und definieren dazu eine Zufallsgrösse Y.
Nennen Sie die Verteilung von Y und geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, falls man durchschnittlich mit 5 Zerfällen in dieser Zeitperiode rechnen kann.

d) Sie schauen sich ein radioaktives Isotop an und arbeiten mit der Zufallsgrösse Z, welche die Zeit misst, bis das Isotop zerfällt.
Nennen Sie die passende Verteilung von Z und geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, wenn es im Mittel 11 Tage dauert bis zum Zerfall.

Lösung Aufgabe 1:

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die jeweils passende Verteilung sowie deren Parameter!

a) Sie wollen bei einem verdächtigen Würfel testen, ob die 6 nicht zu selten vorkommt. Sie definieren dazu die Zufallsgrösse W: Anzahl Würfe, bis die erste 6 erscheint.
Nennen Sie die passende Verteilung von W und geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, falls man im Durchschnitt den Würfel acht Mal werfen muss bis zur ersten 6.

b) Ein Freund behauptet, er könne bei einer geworfenen Münze den Ausgang vorhersagen. Sie glauben ihm nicht und machen folgenden Test. Eine Münze wird acht Mal geworfen und Sie zählen, wie oft der Freund den Ausgang korrekt vorhersagt (=Zufallsgrösse X).
Um was für eine Verteilung handelt es sich bei diesem Experiment? Geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, falls der Freund im Schnitt in 8 Versuchen 5 mal richtig liegt.

c) Sie müssen von einer radioaktiven Probe die Anzahl Zerfälle in den nächsten 10 Sekunden aufschreiben und definieren dazu eine Zufallsgrösse Y.
Nennen Sie die Verteilung von Y und geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, falls man durchschnittlich mit 5 Zerfällen in dieser Zeitperiode rechnen kann.

d) Sie schauen sich ein radioaktives Isotop an und arbeiten mit der Zufallsgrösse Z, welche die Zeit misst, bis das Isotop zerfällt.
Nennen Sie die passende Verteilung von Z und geben Sie auch die Parameter der Verteilung an, wenn es im Mittel 11 Tage dauert bis zum Zerfall.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

a) **Prüfungsaufgabe FS12:**
Sei X eine $\mathcal{N}(9, 81)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P(X \in [8, 15])$.

b) Die Zufallsgrösse X sei normal verteilt mit $\mu = 100$, $\sigma = 4$. Gesucht ist die Zahl x mit $P(97 \leq X \leq x) = 0.6$.

Lösung Aufgabe 2):

a) **Prüfungsaufgabe FS12:**
Sei X eine $\mathcal{N}(9, 81)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P(X \in [8, 15])$.

b) Die Zufallsgrösse X sei normal verteilt mit $\mu = 100$, $\sigma = 4$. Gesucht ist die Zahl x mit $P(97 \leq X \leq x) = 0.6$.

Blatt 9
(Poissonapproximation & CLT, Skript Kapitel 7)

Lernziele: Sie können

- die Formel der Poisson-Approximation korrekt anwenden.
- Aufgaben mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes (CLT) lösen.

Vorwissen:

Poisson-Approximation:

$X_1, X_2, \ldots \sim \text{Bin}(n, p_n)$ mit $np_n = \lambda > 0$. Dann gilt:

$$P[X_n = k] \to \qquad\qquad\qquad \text{für } n \to \infty.$$

Formel CLT:

$$P\left[\sum_{k=1}^{n} X_k \leq a\right] = P\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \qquad\qquad\qquad\right] \longrightarrow P\left[\mathcal{N}(0,1) \leq \frac{a - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right]$$

wobei $\mu =$ Erwartungswert Zufallsgrösse X_k,

und $\sigma^2 =$ Varianz Zufallsgrösse X_k ist.

Häufiger Fehler:

Wenn man eine Summe von bernoulliverteilten Zufallsgrössen hat!

Dann nehmen wir in der Formel für $\mu =$

und für $\sigma =$!!!

Repetition: Erwartungswerte und Varianzen:

- Bernoulli-Verteilung $\mathrm{Be}(p)$ $\quad \mu = p \quad \sigma^2 = p(1-p)$
- Binomial-Verteilung $\mathrm{Bin}(n,p)$ $\quad \mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$
- Geometrische-Verteilung $\mathrm{Ge}(p)$ $\quad \mu = \frac{1}{p} \quad \sigma^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$
- Poisson-Verteilung $\mathrm{Po}(\lambda)$ $\quad \mu = \lambda \quad \sigma^2 = \lambda$
- Uniform-Verteilung $U[a,b]$ $\quad \mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Exponential-Verteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ $\quad \mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- Standardnormal-Verteilung $\quad \mu = 0 \quad \sigma^2 = 1$
- Chiquadrat-Verteilung χ^2_n $\quad \mu = n \quad \sigma^2 = 2n$
- F-Verteilung $F_{m,n}$ $\quad \mu = \frac{n}{n-2}$ falls $n > 2$ $\quad \sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$
- t-Verteilung t_n $\quad \mu = 0$ falls $n > 1$ $\quad \sigma^2 = \frac{n}{n-2}$ falls $n > 2$

Zur Unterstützung:

Storrer, Kapitel 38.6, 39.2 - 39.7, 41.8, 41.9, 43,5

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Ein Medikament hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.5% lästige Nebenwirkungen (Übelkeit). 200 Personen nehmen dieses Medikament ein. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl der Personen, die von der Nebenwirkung betroffen werden.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

b) Berechnen Sie exakt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es höchstens zwei Personen übel wird.

c) Lösen Sie b) näherungsweise mitttels der Poisson-Verteilung.

d) Wieviele Personen darf die Gruppe höchstens umfassen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 20% keine Übelkeitsfälle auftreten sollen? Verwenden Sie sowohl die Binomial- als auch die Poisson-Verteilung.

Lösung Aufgabe 1:

Ein Medikament hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.5% lästige Nebenwirkungen (Übelkeit). 200 Personen nehmen dieses Medikament ein. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl der Personen, die von der Nebenwirkung betroffen werden.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

b) Berechnen Sie exakt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es höchstens zwei Personen übel wird.

c) Lösen Sie b) näherungsweise mitttels der Poisson-Verteilung.

d) Wieviele Personen darf die Gruppe höchstens umfassen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 20% keine Übelkeitsfälle auftreten sollen? Verwenden Sie sowohl die Binomial- als auch die Poisson-Verteilung.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

a) **Prüfungsaufgabe FS09:**
Seien $(X_i)_{i=1}^{100}$ iid U[0,2]-Zufallsgrössen. Berechnen Sie unter Verwendung des CLT

$$P[\sum_{i=1}^{100} X_i \in [93, 105]].$$

b) **Prüfungsaufgabe FS08 (leicht abgeändert):** Petri Fischer geht mit seinem Fischkutter Aurora auf Fischfang. Im heutigen Fanggebiet ist das Gewicht der Fische normalverteilt mit Erwartungswert 500 Gramm und Varianz 50 Gramm^2. Er fängt 3600 Fische.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3600 Fische mehr als 1'800.2 **Kilogramm** wiegen (die maximal erlaubte Nutzlast)? Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz zur Berechnung.

Lösung Aufgabe 2):

a) Seien $(X_i)_{i=1}^{100}$ iid U[0,2]-Zufallsgrössen. Berechnen Sie unter Verwendung des CLT

$$P[\sum_{i=1}^{100} X_i \in [93, 105]].$$

b) Petri Fischer geht mit seinem Fischkutter Aurora auf Fischfang. Im heutigen Fanggebiet ist das Gewicht der Fische normalverteilt mit Erwartungswert 500 Gramm und Varianz 50 Gramm^2. Er fängt 3600 Fische.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3600 Fische mehr als 1'800.2 **Kilogramm** wiegen (die maximal erlaubte Nutzlast)? Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz zur Berechnung.

Blatt 10

(Schätzen von Parametern & Konfidenzintervalle, Skript Kapitel 8)

Lernziele: Sie können

- sowohl mit der Standardnormal- als auch der t-Tabelle umgehen.
- Formeln für Konfidenzintervalle (KI) in den 4 wichtigen Fällen anwenden.

Vorwissen:

Formeln für die 4 wichtigen Konfidenzintervalle:

Konfidenzintervalle für

$$\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

Konfidenzintervalle für

$$\left[(\overline{x} - \overline{y}) \pm CV \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{y})^2}{m+n-2}} \right]$$

Kritischer Wert (CV) aus -Tabelle mit Freiheitsgrad:

$\nu=$ respektive $\nu =$

Beispiel: CV für ein 95% - KI für μ mit Stichprobengrösse $n = 15$:
CV =

Beispiel: CV für ein 90% - KI für $\mu_1 - \mu_2$ mit Stichprobengrösse $m = 12, n = 10$: CV =

$\widehat{\sigma}$ = geschätze Standardabweichung resp. $\widehat{\sigma}^2$ = geschätzte Varianz.
Was ändert sich, falls wir die wahre Varianz σ^2 kennen:

95%-Konfidenzintervalle für

$$\Bigg[\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg]$$

95%-Konfidenzintervalle für

$$\left[\quad (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm 2\sqrt{\tfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \tfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}} \quad \right]$$

Anstatt CV haben wir (beim 95%-KI bei Proportionen) immer 2!
(CLT-Approximation)

Stichprobengrösse n für eine bestimmte KI-Länge d bestimmen:

KI für μ: $n \geq$.

KI für Proportion / Wahrscheinlichkeit p: $n \geq \left(\frac{z_\alpha}{d}\right)^2$.

Zur Unterstützung:

Storrer, Seite 218 (Zusammenfassung Konfidenzintervall für μ)
Storrer, Kapitel 42 + 43

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Für die Korpergrösse von 5 zehnjährigen Knaben erhielt man folgende Werte (in cm):

$$141, 142, 140, 145, 135$$

Schätzen Sie Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und Standardfehler der zugehörigen Grundgesamtheit.
Bemerkung: An der Prüfung erhalten Sie Werte wie $\overline{x}, SS_{xx}$ und weitere, damit Sie die Aufgabe schnell lösen können.

Lösung Aufgabe 1:

Für die Korpergrösse von 5 zehnjährigen Knaben erhielt man folgende Werte (in cm):

$$141, 142, 140, 145, 135$$

Schätzen Sie Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und Standardfehler der zugehörigen Grundgesamtheit.
Bemerkung: An der Prüfung erhalten Sie Werte wie $\overline{x}, SS_{xx}$ und weitere, damit Sie die Aufgabe schnell lösen können.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

a) Benutzen Sie die Daten von Aufgabe 1 und geben Sie das 95% - Konfidenzintervall für die mittlere Körpergrösse der zehnjährigen Knaben an.

b) Im Jahr 1983 wurden in der Stadt Zürich 2994 Kinder geboren. Davon waren 1562 Knaben. Geben Sie das 95% - Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt an.

Lösung Aufgabe 2):

a) Benutzen Sie die Daten von Aufgabe 1 und geben Sie das 95% - Konfidenzintervall für die mittlere Körpergrösse der zehnjährigen Knaben an.

b) Im Jahr 1983 wurden in der Stadt Zürich 2994 Kinder geboren. Davon waren 1562 Knaben. Geben Sie das 95% - Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt an.

Blatt 11

(Testen von Hypothesen & Fehler 1. + 2. Art, Skript Kapitel 9)

Lernziele: Sie knnen

- bei Aufgaben den korrekten Hypothesentest bestimmen.
- die Hypothesentests vollständig und korrekt ausführen
- den Fehler 1. Art und Fehler 2. Art bei gegebener Aufgabestellung berechnen.

Vorwissen:

Vorgehen Hypothesentest:

1. .

2. und (wenn möglich) wählen.

3. .

4. Verteilung der Teststatistik unter ?

5. .

6. Brauchen Daten.

7. .

8. Gesunder Menschenverstand: Resultat sinnvoll? links vs rechts vs beidseitig; von Daten her schon offensichtlich (nicht) signifikant; Effekt vs allg Streuung vs Stichprobengrsse?

t-Tabelle vom Storrer:

Wo lesen wir das α ab:

- zweiseitiger Test:

- einseitiger Test:

Beispiel für $\alpha = 1\%,\ n = 23$ (1-Stichproben t-Test).
Bestimme den CV für

$\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \longrightarrow \quad \text{CV} =$

$\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0 \quad \longrightarrow \quad \text{CV} =$

$\mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0 \quad \longrightarrow \quad \text{CV} =$

Fehler 1. Art + 2. Art:

	$\mathcal{H}_0$ wahr	$\mathcal{H}_0$ falsch, $\mathcal{H}_1$ richtig
$\mathcal{H}_0$ ablehnen		
$\mathcal{H}_0$ beibehalten		

Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist dann das .

Zur Untersttzung:

Übung 11 (Teststatistik-Formeln)
Storrer, Seite 232+233 (Zusammenfassung Testen von Hypothesen)
Storrer, Kapitel 44 - 46

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) Ein Geschäft verkauft Marzipanrollen mit Gewichtsangabe 80 g. Eine Überprüfung von 25 Packungen ergab ein mittleres Gewicht von 79 g mit einer geschätzten Standardabweichung von 2.6 g.
Testen Sie zum Niveau 5% die Frage, ob allenfalls zuwenig Marzipan abgepackt wurde.

b) **Prüfungsaufgabe FS15:** Ein Würfel wird untersucht, ob er fair ist oder nicht. Dazu wird er 600 mal geworfen. Es gab 107 mal eine 4. Testen Sie mit dem Test auf Proportionen zum Niveau 5 %, ob die Proportion der 4er signifikant zu hoch ist oder nicht.

Lösung Aufgabe 1:

a) Ein Geschäft verkauft Marzipanrollen mit Gewichtsangabe 80 g. Eine Überprüfung von 25 Packungen ergab ein mittleres Gewicht von 79 g mit einer geschätzten Standardabweichung von 2.6 g.
Testen Sie zum Niveau 5% die Frage, ob allenfalls zuwenig Marzipan abgepackt wurde.

b) Ein Würfel wird untersucht, ob er fair ist oder nicht. Dazu wird er 600 mal geworfen. Es gab 107 mal eine 4. Testen Sie mit dem Test auf Proportionen zum Niveau 5 %, ob die Proportion der 4er signifikant zu hoch ist oder nicht.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Willy Würfel besass einen fairen Würfel (bei dem die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs also 1/6 betrug). Er hatte aber noch einen schlechten Würfel, bei dem die Sechs eine Wahrscheinlichkeit von nur 10% hatte. Der Erbe des fairen Würfel vermutete, (irrtümlicherweise) den schlechten Würfel erhalten zu haben und wollte diese Vermutung mit einem statistischen Test überprüfen. Er beschloss deshalb, den Würfel 15-mal zu werfen. Sollten dabei zwei oder weniger Sechsen fallen, so würde er davon ausgehen, es handle sich doch um den schlechten 10% Würfel.

a) Formulieren Sie zu diesem Experiment die Null- und die Alternativhypothese.

b) Geben Sie die konkrete Bedeutung von "Fehler 1. Art" und "Fehler 2. Art" (in Worten) an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. bzw. 2. Art.

Lösung Aufgabe 2):

Willy Würfel besass einen fairen Würfel (bei dem die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs also 1/6 betrug). Er hatte aber noch einen schlechten Würfel, bei dem die Sechs eine Wahrscheinlichkeit von nur 10% hatte. Der Erbe des fairen Würfel vermutete, (irrtümlicherweise) den schlechten Würfel erhalten zu haben und wollte diese Vermutung mit einem statistischen Test überprüfen. Er beschloss deshalb, den Würfel 15-mal zu werfen. Sollten dabei zwei oder weniger Sechsen fallen, so würde er davon ausgehen, es handle sich doch um den schlechten 10% Würfel.

a) Formulieren Sie zu diesem Experiment die Null- und die Alternativhypothese.

b) Geben Sie die konkrete Bedeutung von "Fehler 1. Art" und "Fehler 2. Art" (in Worten) an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. bzw. 2. Art.

Blatt 12

(Chiquadrat-Test & Varianzanalyse, Skript Kapitel 9 + 10)

Lernziele: Sie können
- einen χ^2-Unabhängigkeitstest wie auch einen χ^2-Anpassungstest durchführen.
- eine Varianzanalyse (ANOVA) durchführen.

Vorwissen:

Nullhypotheses und Teststatistik des χ^2-Anpassungstests:

$\mathcal{H}_0$:

Teststatistik:

Nullhypothese und Teststatistik des χ^2-Unabhängigkeitstests:

$\mathcal{H}_0$:

Teststatistik:

Anzahl Freiheitsgrade des kritischen Werts (aus -Tabelle)

- Unabhängigkeitstest: $\nu =$

- Anpassungstest: $\nu =$

Testentscheid: $\mathcal{H}_0$ ablehnen falls

ANOVA (Varianzanalyse):

- Null- und Alternativhypothesen:

$\mathcal{H}_0$:

$\mathcal{H}_1$:

- Teststatistik: $\dfrac{\sum \qquad \sum_{i=1}^{n_j}(\overline{Y}_{.j} - GM)^2/(k-1)}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \overline{Y}_{.j})^2/(n-k)}$

mit $\quad \bar{Y}_{.j} := \dfrac{\sum \qquad}{\qquad}$

und $\quad GM := \dfrac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}}{\qquad}$

- CV aus -Tabelle mit Zähler-Freiheitsgrade = ,

  Nenner-Freiheitsgrade = .

  Beispiel: $\alpha = 5\%$, Anzahl Klassen = 3, $n = 17$ CV =

- Testentscheid:

  $\mathcal{H}_0$ ablehnen, falls

<u>Zur Unterstützung:</u>

Storrer, Seite 260 - 261 (Übersicht χ^2-Anpassungstest)
Storrer, Seite 271 - 275 (Beispiel Unabhängigkeitstest)
Storrer, Kapitel 47

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

200 Student(inn)en mussten sich sowohl in Mathematik als auch in Physik prüfen lassen. Die Resultate waren:

	Mathematik bestanden	Mathematik nicht bestanden
Physik bestanden	106	24
Physik nicht bestanden	45	23

Besteht zwischen den beiden Prüfungen ein Zusammenhang ($\alpha = 5\%$)? Bitte lösen Sie diese Aufgabe mit dem Chiquadrattest auf Unabhängigkeit und nicht mit einem 2-Stichproben-Proportionentest (0 Punkte!)

Lösung Aufgabe 1:

200 Student(inn)en mussten sich sowohl in Mathematik als auch in Physik prüfen lassen. Die Resultate waren:

	Mathematik bestanden	Mathematik nicht bestanden
Physik bestanden	106	24
Physik nicht bestanden	45	23

Besteht zwischen den beiden Prüfungen ein Zusammenhang ($\alpha = 5\%$)? Bitte lösen Sie diese Aufgabe mit dem Chiquadrattest auf Unabhängigkeit und nicht mit einem 2-Stichproben-Proportionentest (0 Punkte!)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2: (Prüfungsaufgabe FS07 (leicht angepasst):)

Der Nitratgehalt von 2 Seen wird mit diversen Stichproben untersucht. Dabei steht die Hypothese im Raum, dass der Nitratgehalt überall gleich ist - bis auf zufällige Schwankungen. In See 1 haben wir 4 Messungen gemacht. Die Werte seien in Milligramm pro Liter 1.5, 1.2, 1.4, 2.1.
Bei See 2 waren es 3 Messungen mit Werten 1.6, 1.3, 1.5.
Gehen Sie davon aus, dass die Stichproben unabhängig voneinander sind und modellieren Sie den Nitratgehalt mit einer Normalverteilung. Setzen Sie zudem gleiche Varianzen voraus.

a) Führen Sie eine Varianzanalyse auf dem Niveau 5% durch, um zu testen, ob sich der Nitratgehalt der 2 Seen signifikant unterscheidet oder nicht.

b) Mit welchen beiden Methoden kann man diese Frage exakt gleichwertig lösen?

Lösung Aufgabe 2):

Der Nitratgehalt von 2 Seen wird mit diversen Stichproben untersucht. Dabei steht die Hypothese im Raum, dass der Nitratgehalt überall gleich ist - bis auf zufällige Schwankungen. In See 1 haben wir 4 Messungen gemacht. Die Werte seien in Milligramm pro Liter 1.5, 1.2, 1.4, 2.1. Bei See 2 waren es 3 Messungen mit Werten 1.6, 1.3, 1.5.
Gehen Sie davon aus, dass die Stichproben unabhängig voneinander sind und modellieren Sie den Nitratgehalt mit einer Normalverteilung. Setzen Sie zudem gleiche Varianzen voraus.

a) Führen Sie eine Varianzanalyse auf dem Niveau 5% durch, um zu testen, ob sich der Nitratgehalt der 2 Seen signifikant unterscheidet oder nicht.

b) Mit welchen beiden Methoden kann man diese Frage exakt gleichwertig lösen?

Blatt 13

(Lineare Regression, Skript Kapitel 10)

Lernziele: Sie können

- die Regressionsgerade berechnen.
- einen Hypothesentest für die Steigung der Geraden korrekt und vollständig durchführen.

Vorwissen:

Geschätzte **Regressionsgerade:**

mit OLS Schätzer für die Steigung =

und OLS-Schätzer für den y-Achsenabschnitt =

Hypothesentest - Testen ob $\beta_1 = b$:

1. Hypothesen aufstellen
2. Teststatistik = berechnen
3. Kritischer Wert aus -Tabelle mit Freiheitsgrad $\nu =$.
4. Testentscheid

Kritischer Wert bestimmen:

Beispiel für $\alpha = 0.05,\ n = 7.$ Bestimme den CV für

$\mathcal{H}_1 : \beta_1 \neq b \quad \longrightarrow \quad \text{CV} =$

$\mathcal{H}_1 : \beta_1 > b \quad \longrightarrow \quad \text{CV} =$

$\mathcal{H}_1 : \beta_1 < b \quad \longrightarrow \quad \text{CV} =$

empirische Korrelationskoeffizient $= r_{xy} =$

Bestimmtheitsmass $= R^2 = \dfrac{SSR}{SSR + SSE} \in [\quad , \quad]$

sagt, wie hoch der Anteil der ,

welcher durch erklärt wird.

$$SS_{yy} \quad = \quad SSR \qquad + \qquad SSE,$$

also $$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad + \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1: (leicht angepasste Prüfungsaufgabe FS10:)

Der Zusammenhang zwischen der Handlänge und der Körpergrösse bei erwachsenen Frauen wird untersucht. Die Vermutung ist, dass je grösser eine Frau, desto länger auch ihre Hände. Auf Grund der jetzigen Prüfungssituation stehen Ihnen nur 5 Wertepaare zur Verfügung; in (x, y) bezeichnen wir mit x die Handlänge in Zentimetern und mit y die Körpergrösse in Zentimetern:
erstes Paar: (20, 180), zweites Paar: (18, 178), drittes Paar: (22, 188), viertes Paar: (21, 178), fünftes Paar: (17, 160).

Bemerkung: An der Prüfung erhalten Sie Werte wie $\overline{x}$, SS_{xx} und weitere, die Ihnen das Lösen der Aufgabe erleichtern.
Hier konkret sind dies: $SS_{xx} = 17.2$, $SS_{xy} = 71.6$, $SSR = 298.06$ und $SS_{yy} = 420.8$.

a) Berechnen Sie $\hat{\beta}_0$ (= y-Achsenabschnitt), $\hat{\beta}_1$ (= Steigung) mit der OLS-Methode.

b) Testen Sie auf dem 5%-Niveau einseitig, ob es obigen stipulierten Zusammenhang gibt oder nicht.

c) Wenn man die Gültigkeit des Modells unterstellt: welche Körpergrösse wird dann für eine Handlänge von 19 Zentimetern erwartet?

Lösung Aufgabe 1:

Der Zusammenhang zwischen der Handlänge und der Körpergrösse bei erwachsenen Frauen wird untersucht. Die Vermutung ist, dass je grösser eine Frau, desto länger auch ihre Hände. Auf Grund der jetzigen Prüfungssituation stehen Ihnen nur 5 Wertepaare zur Verfügung; in (x, y) bezeichnen wir mit x die Handlänge in Zentimetern und mit y die Körpergrösse in Zentimetern:
erstes Paar: (20, 180), zweites Paar: (18, 178), drittes Paar: (22, 188), viertes Paar: (21, 178), fünftes Paar: (17, 160).

Bemerkung: An der Prüfung erhalten Sie Werte wie $\overline{x}$, SS_{xx} und weitere, die Ihnen das Lösen der Aufgabe erleichtern.
Hier konkret sind dies: $SS_{xx} = 17.2$, $SS_{xy} = 71.6$, $SSR = 298.06$ und $SS_{yy} = 420.8$.

a) Berechnen Sie $\hat{\beta}_0$ (= y-Achsenabschnitt), $\hat{\beta}_1$ (= Steigung) mit der OLS-Methode.

b) Testen Sie auf dem 5%-Niveau einseitig, ob es obigen stipulierten Zusammenhang gibt oder nicht.

c) Wenn man die Gültigkeit des Modells unterstellt: welche Körpergrösse wird dann für eine Handlänge von 19 Zentimetern erwartet?