Skript für Übungsstunden MAT 182

Analysis für die Naturwissenschaften

Drucken Sie diese Unterlagen einseitig aus! Eine Seite pro A4-Blatt.

Es ist sehr sinnvoll, wenn Sie schon vor der Übungsstunde am vorgesehenen Platz versuchen, die beiden Aufgaben zu lösen.

Tipps für die Studis

- Vorlesung und Übung ergänzen sich und sollen gemeinsam bei den Studierenden wirkliches Verstehen des Stoffes bewirken. Die Vorlesung bietet im allgemeinen Überblicks- und Orientierungswissen auf einem hohen Abstraktionsniveau. Dies und die häufig frontale Form laden zum passiven Lernen und damit zum Oberflächenlernen ein. Übungen können die abstrakten Inhalte der Vorlesung vertiefen und konkretisieren, indem sie Anwendungen anbieten. Die Studierenden können sich aktiv mit den Inhalten der Vorlesung auseinandersetzen. Übungen bieten die Chance zum aktiven Lernen.
- Lernen müssen Sie nach der Vorlesung erstmal selber in aller Ruhe. Auch die Übungen versuchen Sie zuerst selber in aller Ruhe. Erst danach treffen Sie Ihre Mitstudis und besprechen die Übungen gemeinsam.
- Der Tendenz nach werden die Aufgaben zu einem Gebiet immer leicht schwieriger, entlang folgender Kaskade: 1. Aufgaben in der Vorlesung, 2. Aufgaben im Übungsskript, 3. Übungsaufgaben, welche abzugeben sind, 4. Prüfungsaufgaben. Damit der Lerneffekt am Besten ist, sollten Sie deshalb im Zeitablauf genau so den Stoff lernen und keine Etappe auslassen!
- Wie sollte man Übungen lösen:
  - zuerst immer selber probieren
  - falls nicht geht: im Luchsinger/Storrer hat es zu jedem Kapitel viele Übungen mit Lösungen, üben Sie zuerst dort!
  - falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen
  - falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen
  - falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi folgen (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!)
- Hinweis: Seitenangaben im Luchsinger/Storrer beziehen sich auf das gedruckte Buch.
- Verbesserungen bitte an abigail.sutton@math.uzh.ch

Blatt 2
(Vektoren I, Luchsinger/Storrer 1+2)

Lernziele: Sie können
- mit Vektoren umgehen.
- die Parameterdarstellung von der Geraden aufstellen.
- die Parameterdarstellung der Ebene berechnen.
- den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen.

Vorwissen:

Parametergleichung der Geraden durch die Punkte A, B:

Parametergleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C:

Zur Unterstützung:

Luchsinger/Storrer, Seiten 28+29 (Definitionen, u.a. Skalarprodukt, Länge, Winkel)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Die Punkte $O(0,0,0)$, $A(3,2,-2)$, $C(0,2,-1)$ sind Ecken eines Parallelogramms, wobei sich A und C diagonal gegenüberliegen.

a) Bestimmen Sie die vierte Ecke B.

b) Wie lang sind die Diagonalen OB und AC?

c) Bestimmen Sie den spitzen Winkel zwischen den Diagonalen.

Lösung Aufgabe 1:

Die Punkte $O(0,0,0)$, $A(3,2,-2)$, $C(0,2,-1)$ sind Ecken eines Parallelogramms, wobei sich A und C diagonal gegenüberliegen.

a) Bestimmen Sie die vierte Ecke B.

b) Wie lang sind die Diagonalen OB und AC?

c) Bestimmen Sie den spitzen Winkel zwischen den Diagonalen.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2: Gegeben sind die Punkte $D(2,0,3)$, $E(6,-4,0)$, $F(2,6,5)$, $G(3,7,4)$ und $H(4,6,6)$.

a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Geraden DE.

b) Bestimmen Sie die Parametergleichung der Ebene FGH.

c) In welchem Punkt schneidet die Gerade DE die Ebene FGH?

Lösung Aufgabe 2:

Gegeben sind die Punkte $D(2,0,3)$, $E(6,-4,0)$, $F(2,6,5)$, $G(3,7,4)$ und $H(4,6,6)$.

a) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Geraden DE.

b) Bestimmen Sie die Parametergleichung der Ebene FGH.

c) In welchem Punkt schneidet die Gerade DE die Ebene FGH?

Blatt 3

(Vektoren II, Luchsinger/Storrer 1+2)

Lernziele: Sie können

- die Eigenschaften des Vektorprodukts benutzen.
- die Koordinatengleichung der Ebene berechnen.
- den Schnittpunkt einer Gerade und Ebene berechnen.
- den Winkel zwischen einer Geraden und Ebene oder zwei Ebenen berechnen.
- die Schnittgerade zweier Ebenen berechnen.

Vorwissen:

Fläche des Dreiecks ABC:

Normalengleichung der Ebene: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$

Winkel zwischen Gerade AB und Gerade EF:

Wenn zwei Vektoren orthogonal (= senkrecht) zueinander stehen, dann gilt:

Um den Winkel zwischen Gerade und Ebene zu berechnen brauchen wir welche Vektoren?

Die Schnittgerade zweier Ebenen steht senkrecht auf welche Vektoren?

Zur Unterstützung:
Luchsinger/Storrer, Seiten 28+29 (Definitionen, u.a. Skalarprodukt, Vektorprodukt, Länge, Winkel)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Die Ebene E geht durch den Punkt (0, 2, 0) und steht normal zu $\vec{n}$, die Ebene F geht durch den Punkt (0, 1, 2) und steht normal zu $\vec{m}$ mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lauten die beiden Ebenengleichungen?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F an.

Lösung Aufgabe 1:

Die Ebene E geht durch den Punkt (0, 2, 0) und steht normal zu $\vec{n}$, die Ebene F geht durch den Punkt (0, 1, 2) und steht normal zu $\vec{m}$ mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lauten die beiden Ebenengleichungen?

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden von E und F an.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Wir betrachten die Gerade g, welche durch die Punkte $(1, -2, \frac{1}{4})$ und $(2, 0, \frac{1}{2})$ geht.

a) Wo durchstösst g die yz-Ebene?

b) In welchem Winkel steht g zur xy-Ebene?

c) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zerlegen Sie $\vec{x}$ in eine Summe $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ so, dass $\vec{y}$ parallel und $\vec{z}$ senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

Lösung Aufgabe 2:

Wir betrachten die Gerade g, welche durch die Punkte $(1, -2, \frac{1}{4})$ und $(2, 0, \frac{1}{2})$ geht.

a) Wo durchstösst g die yz-Ebene?

b) In welchem Winkel steht g zur xy-Ebene?

c) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zerlegen Sie $\vec{x}$ in eine Summe $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ so, dass $\vec{y}$ parallel und $\vec{z}$ senkrecht zu $\vec{a}$ ist.

Blatt 4

(Grenzwerte und die Ableitung, Luchsinger/Storrer 3+4)

Lernziele: Sie können

- Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 überprüfen.
- die Polynomdivision durchführen.
- die Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten berechnen.

Motivation:

Was kann man alles mit der Ableitung darstellen?

Vorwissen:

Definition der Ableitung $f'(x_0)$ (Differentialquotient):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Die Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn:

$$= \qquad\qquad\qquad = f(x_0)$$

Ist jede differenzierbare Funktion auch stetig?

Gilt die Umkehrung auch? (Gegenbeispiel)

Falls die Funktion f stetig ist an der Stelle x_0, können wir weiter überprüfen ob die Funktion auch differenzierbar ist an der Stelle x_0, d.h. ob gilt:

Zur Unterstützung:

Bitte letzte Seite Kapitel 4 im Vorlesungsskript beachten.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Sind die folgenden Funktionen an der Stelle x_0 differenzierbar, stetig, aber nicht differenzierbar oder unstetig?

a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } x < 0 \\ \cos x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ x^2 + x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ \ln(x) + x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}, \qquad x_0 = 1$

Lösung Aufgabe 1:

Wir machen hier der Einfachheit halber einen kleinen Notationsmissbrauch: wir schreiben in der Musterlösung bei der Überprüfung der Differenzierbarkeit $f'(x) = \ldots$ und dann kommt eine geschweifte Klammer (Fallunterscheidung), wobei am Übergang die Differenzierbarkeit überprüft werden muss. Wenn man $f'(x)$ schreibt, dann existiert streng genommen $f'(x)$ ja schon (sonst dürfte man es nicht schreiben) und damit ist die Funktion bei x_0 automatisch differenzierbar. Wir machen hier aber ab, dass damit gemeint ist, dass die Funktion innerhalb der offenen Teilintervalle differenzierbar ist und dort die angegebenen Ableitungen hat.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

a) Führen Sie folgende Polynomdivision aus: $(x^3 + 1) : (x + 1) =$

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = -1$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

Lösung Aufgabe 2:

a) Führen Sie folgende Polynomdivision aus: $(x^3 + 1) : (x + 1) =$

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = -1$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

Blatt 5

(Technik des Differenzierens, Luchsinger/Storrer 5)

Lernziele: Sie können

- sowohl einfache wie auch komplizierte Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln fehlerlos ableiten.
- eine Funktion so bestimmen, dass sie an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

Vorwissen:

Konstante-Faktor-Regel:

Produktregel:

Quotientenregel:

Kettenregel:

Bedingungen um in x_0 differenzierbar zu sein:

Der Definitionsbereich wird u.A. durch welche Funktionen (und wie) eingeschränkt?

<u>Zur Unterstützung:</u>

Luchsinger/Storrer, Seite 67+68 ("Ableitungs-Tabelle")

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Leiten Sie - ohne umformen oder vereinfachen - mit der Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel folgende Funktionen ab:

a) $f(x) = 1 \cdot x \qquad g(x) = \frac{x^6}{x^4} \qquad h(x) = e^{2x}$

Geben Sie die Ableitung an:

b) $k(x) = \ln(x+1) + \frac{3}{x} + \cos(x) + 3\sqrt[3]{x^2} + xe^x$

c) $m(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$

d) $G(u) = \sqrt{\ln(u^3+1)}$

Lösung Aufgabe 1:

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 2 \\ bx + 1 & x > 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist?

Lösung Aufgabe 2):

Blatt 6

(Anwendungen der Ableitung und Linearisierung, Luchsinger/Storrer 6+7)

Lernziele: Sie können

- Funktionen analysieren (Kurvendiskussion).
- **alle** Extrema einer Funktion finden und deren Typ bestimmen.
- globale Extrema - falls vorhanden - bestimmen.
- die Gleichung der linearisierten Funktion von $f(x)$ in x_0 aufstellen.

Vorwissen:

Kandidaten für Extrema sind:

-

-

-

Die Gleichung der linearisierten Funktion von $f(x)$ in x_0 lautet:

Zur Unterstützung:

Luchsinger/Storrer, Seite 79 (Übersicht Kurvendiskussion)
Luchsinger/Storrer, Seite 86 (Wendepunkte)
Luchsinger/Storrer, Seite 102 (7.3 Linearisierung einer Funktion)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$.

a) Wo nimmt sie positive, wo negative Werte an?

b) wo wächst sie, wo fällt sie?

c) Wo beschreibt der Graph eine Linkskurve, wo eine Rechtskurve?

d) Skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung der Erkenntnisse aus a), b) und c).

Lösung Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$.

a) Wo nimmt sie positive, wo negative Werte an?

b) wo wächst sie, wo fällt sie?

c) Wo beschreibt der Graph eine Linkskurve, wo eine Rechtskurve?

d) Skizzieren Sie den Graphen von f unter Verwendung der Erkenntnisse aus a), b) und c).

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2: (Probeprüfungsaufgabe HS12)

Sei $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Finden Sie alle (globalen und lokalen) Extremalstellen und geben Sie an, von welchem Typ sie sind.

Lösung Aufgabe 2):

Sei $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Finden Sie alle (globalen und lokalen) Extremalstellen und geben Sie an, von welchem Typ sie sind.

Blatt 7

(Die Ableitung einer Vektorfunktion, Luchsinger/Storrer 8)

Lernziele: Sie können

- den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor berechnen.
- die Funktion für die Schnelligkeit (zur Zeit t) berechnen.
- den Verlauf von Kurven skizzieren.
- die Tangentengleichung an einem bestimmten Punkt der Kurve bestimmen.

Vorwissen:

Die Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ beschreibt:

Was ist der Unterschied zwischen Geschwindigkeit und Schnelligkeit in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$?

Der Geschwindigkeitsvektor wird bezeichnet mit:

So berechnet man die Schnelligkeit an einer Stelle t_0:

Hinweis: Die Extremalstellen von $\sqrt{f(t)}$ sind die gleichen wie die Extremalstellen von $f(t)$, da $\sqrt{\dots}$ streng monoton ist.
$\rightarrow$ gilt analog bei $\exp(\dots)$ und $\ln(\dots)$.

Formel für die Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\vec{x}(t_0)$:

Der Tangentialvektor dieser Tangente ist:

Zur Unterstützung:
Luchsinger/Storrer, Seite 116 (Überblick Vektorfunktion)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom "Ubungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Ein Massepunkt bewegt sich gemäss

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t^2 \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve für $t \in [0, 1]$.

b) Welchen Betrag hat die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$?

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Schnelligkeit maximal? Wie gross ist sie dann?

Lösung Aufgabe 1:

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Ein Kurvenstück hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ 1 + \sin t \\ \sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi].$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt, der zum Parameterwert $t = 0$ gehört, an.

b) Dasselbe für den Parameterwert $t = 2\pi$.

c) Stehen die Tangenten orthogonal aufeinander?

Lösung Aufgabe 2):

Ein Kurvenstück hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t \\ 1+\sin t \\ \sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi].$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt, der zum Parameterwert $t = 0$ gehört, an.

b) Dasselbe für den Parameterwert $t = 2\pi$.

c) Stehen die Tangenten orthogonal aufeinander?

Blatt 8

(Integralrechnung, Luchsinger/Storrer 9-12)

Lernziele: Sie können

- bestimmte und unbestimmte Integrale berechnen.
- Stammfunktionen finden, welche eine vorgegebene Anfangsbedingung erfüllen.
- mit Hilfe des Integrals vorgegebene Flächen berechnen.

Motivation:

Mit Hilfe des bestimmten Integrals können wir z.B. einen Flächeninhalt berechnen.
Nennen Sie weitere Beispiele:

Vorwissen:

F heisst Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, wenn ist, für alle $x \in I$.

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx =$

Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx =$

Wie bestimmt man die Fläche (= Flächeninhalt) zwischen zwei Funktionen?

-

-

<u>Zur Unterstützung:</u>

Luchsinger/Storrer, Seiten 163+165+186
Luchsinger/Storrer, Seiten 67+68 (Listen von Stammfunktionen)
Luchsinger/Storrer, Seite 172 (Rechenregeln für das Integral)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1: Geben Sie alle Stammfunktionen an von

a) $g(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^4}$

b) $f(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$

Berechnen Sie

c) $\displaystyle\int_4^1 (u + \frac{2}{\sqrt{u}} + \frac{3}{u})du$

d) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} (\sin\alpha - 2\cos\alpha)d\alpha$

Lösung Aufgabe 1:

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2: Durch $y = \sqrt[4]{x}$ und $y = x^4$ mit $x \in [0, 2]$ sind zwei Kurven gegeben. Berechnen Sie den Inhalt des durch diese Kurven begrenzten Flächenstücks.

Lösung Aufgabe 2):

Durch $y = \sqrt[4]{x}$ und $y = x^4$ mit $x \in [0,2]$ sind zwei Kurven gegeben. Berechnen Sie den Inhalt des durch diese Kurven begrenzten Flächenstücks.

Blatt 9

(Weitere Integrationsmethoden, Luchsinger/Storrer 13)

Lernziele: Sie können

- Integrale mit Hilfe der Substitutions-Methode berechnen.
- Integrale mit Hilfe der partiellen Integration berechnen.

Vorwissen:

Wie lautet die Formel der Substitutions-Methode?

$$\int f(u(x))u'(x)dx =$$

Sicherste Methode bei bestimmten Integralen:
- Grenzen ignorieren
- Stammfunktion (in x) finden
- Grenzen (für x) einsetzen

Die Substitutionsmethode ist die Umkehrung von:

Wie lautet die Formel der partiellen Integration?

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx =$$

Die Methode der partiellen Integration ist die Umkehrung von:

Wozu braucht man das Wort LAPTE (und wofür stehen die Buchstaben)?

Zur Unterstützung:

Luchsinger/Storrer, Seite 179 (Substitution)
Luchsinger/Storrer, Seiten 182+183 (Partielle Integration, inkl. Beispiele)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode:

a) $\int (e^x - 1)^2 e^x dx$

b) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 2} dx$

Lösung Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode:

a) $\int (e^x - 1)^2 e^x dx$

b) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 2} dx$

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Lösen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration:

a) $\int x^2 e^{-x} dx$

b) $\int e^x \sin x dx$

Lösung Aufgabe 2):

Blatt 10
(Integration von Vektorfunktionen & Uneigentliche Integrale, Luchsinger/Storrer 14+20)

Lernziele: Sie können

- Kurvenintegrale berechnen.
- uneigentliche Integrale korrekt berechnen.

Vorwissen:

Formel zur Berechnung eines Kurvenintegrals:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\ dt.$$

Dabei ist $\vec{r}(t)$ mit $a \leq t \leq b$ eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks C.

In welchen Fällen bezeichnen wir ein Integral als uneigentliches Integral:

1.

2.

Das uneigentliche Integral wird berechnet als Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x)dx =$$

Nützliche Umformung: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Nützliche Grenzwerte: $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = 0$ $\qquad \lim_{t \to \pm\infty} \arctan(t) = \pm\frac{\pi}{2}$

Zur Unterstützung:

Luchsinger/Storrer, Seite 190+198 (Kurvenintegral)
Luchsinger/Storrer, Seite 314+318 (Uneigentliche Integrale)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Es sei C die Strecke von $A(1,0,-1)$ nach $B(2,1,0)$. Berechnen Sie $\int_C \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ für

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 2x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3^2 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Lösung Aufgabe 1:

Es sei C die Strecke von $A(1, 0, -1)$ nach $B(2, 1, 0)$. Berechnen Sie $\int_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$ für

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 2x_2 \\ x_2 x_3 \\ x_3^2 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^3}$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{u}{1+u^2}du$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-|x|^3}dx$

Lösung Aufgabe 2):

Blatt 11

(Der Begriff der Differentialgleichung (DGL), Luchsinger/Storrer 15)

Lernziele: Sie können

- Differentialgleichungen aufstellen.
- überprüfen, ob eine gegebene Funktion eine Lösung der DGL ist.
- stationäre Lösungen einer homogenen DGL berechnen.

Motivation:

Wofür werden Differentialgleichungen gebraucht?

Welche Beispiele solcher Vorgänge (inkl. dazugehöriger DGL) kennen Sie?

Vorgang:

DGL:

Vorgang:

DGL:

Vorgang:

DGL:

Vorwissen:

Wie überprüft man, ob eine gegebene Funktion eine Lösung der Differentialgleichung ist?

Wie findet man stationäre (=konstante) Lösungen einer homogene DGL $y' = r(x) \cdot s(y)$?

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

a) Wir nehmen an, die Wachstumsgeschwindigkeit für die Höhe h einer Pflanze sei proportional zur Höhe (je höher die Pflanze, desto rascher wächst sie) und umgekehrt proportional zur 3. Potenz ihres Alters t (zunehmendes Alter verringert die Wachstumsbereitschaft). Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $h(t)$ auf.

b) Zeigen Sie, dass $y = f(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Lösung Aufgabe 1:

a) Wir nehmen an, die Wachstumsgeschwindigkeit für die Höhe h einer Pflanze sei proportional zur Höhe (je höher die Pflanze, desto rascher wächst sie) und umgekehrt proportional zur 3. Potenz ihres Alters t (zunehmendes Alter verringert die Wachstumsbereitschaft). Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $h(t)$ auf.

b) Zeigen Sie, dass $y = f(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

a) Das Wachstum einer Zelle hängt von den durch ihre Oberfläche eindringenden Substanzen ab. Wir bezeichnen das Zellvolumen zur Zeit t mit $V(t)$. Wir wollen nun annehmen, die Änderungsgeschwindigkeit des Volumens der als kugelförmig angenommenen Zelle sei proportional zu ihrer Oberfläche. Wie lautet die dazugehörige Differentialgleichung (DGL)?
Hinweis: Der Radius hängt von der Zeit ab!

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 3y^2 + 4y - y^3 - 12$$

Lösung Aufgabe 2):

a) Das Wachstum einer Zelle hängt von den durch ihre Oberfläche eindringenden Substanzen ab. Wir bezeichnen das Zellvolumen zur Zeit t mit $V(t)$. Wir wollen nun annehmen, die Änderungsgeschwindigkeit des Volumens der als kugelförmig angenommenen Zelle sei proportional zu ihrer Oberfläche. Wie lautet die dazugehörige Differentialgleichung (DGL)?
Hinweis: Der Radius hängt von der Zeit ab!

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 3y^2 + 4y - y^3 - 12$$

Blatt 12

(Einige Lösungsmethoden (von DGL), Luchsinger/Storrer 16)

Lernziele: Sie können

- allgemeine und spezielle Lösungen homogener Differentialgleichungen bestimmen.
- allgemeine und spezielle Lösungen inhomogener linearer DGL berechnen.
- die Methode "Variation der Konstanten" ausführlich anwenden.
- die Methode "Separation der Variablen" ausführlich anwenden.

Vorwissen:

Allgemeine Form einer homogenen DGL:

Lösungsmethode:

Allgemeine Form einer linearen inhomogenen DGL:

Lösungsmethode:

Bezeichnungen:
In dieser Vorlesung gilt: Spezielle Lösung ist eine Lösung zu gegebenen Anfangsbedingungen (im Gegensatz zur allgemeinen Lösung).
Konstante (=stationäre) Lösungen sind Lösungen, welche sich im Zeitverlauf nicht ändern.

Singuläre Lösungen sind solche, welche bei der Methode der Separation der Variablen in der allgemeinen Lösung nicht vorhanden sind - sie sind auch konstant.

Beispiel 1: Die stationären Lösungen von $y' = \sin(x)(y^2 - 4)$ sind:

Beispiel 2: Die stationären Lösungen von $y' = -x\sqrt{y}$ sind:

Beispiel 3: DGL $y' = y$.

allgemeine Lösung:

spezielle Lösung mit $y(0) = 3$:

<u>Zur Unterstützung:</u>

Luchsinger/Storrer, Seite 222 (Übersicht)
Luchsinger/Storrer, Seite 230 (Variation der Konstante)
Luchsinger/Storrer, Seite 236 (Separation der Variablen)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung:

$$y' = -x^2 e^y.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen.

b) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung?

c) Geben Sie die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung an, welche durch den Punkt $(0, -3)$ geht.

Lösung Aufgabe 1:

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - 2y = x$$

mit der Methode *Variation der Konstante*.

Lösung Aufgabe 2):

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - 2y = x$$

mit der Methode *Variation der Konstante*.

Blatt 13

(Umkehrfunktion und Einige Wichtige Funktionen und ihre Anwendungen, Luchsinger/Storrer 17+18)

Lernziele: Sie können

- Umkehrfunktionen inklusive Definitionsbereich und Wertebereich bestimmen.
- die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion anwenden.
- (periodische) Funktionen modifizieren.

Vorwissen:

Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit die Umkehrfunktion f^{-1} definiert ist?

f muss auf D(f) injektiv sein.

In dem Fall gilt: $D(f^{-1}) =$ und $W(f^{-1}) =$.

Wie können wir den Graphen von f^{-1} zeichnen?

Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Kleine Auswahl zum Thema: Modifikation einer Funktion

$f(x)$ um a in (positiver) x-Richtung verschieben

$\Rightarrow$ neue Funktion $h(x) =$

$f(x)$ an der y-Achse spiegeln

$\Rightarrow$ neue Funktion $h(x) =$

Die periodische Funktion $A \sin\left(\frac{2\pi}{p}(x - x_0)\right)$ hat

Amplitude ,

Periode

und ist verschoben um:

Zur Unterstützung:

Luchsinger/Storrer, Seite 249 (Überblick Umkehrfunktionen)
Luchsinger/Storrer, Seiten 253-255 (Arcus-Funktionen)
Luchsinger/Storrer, Seiten 264+265 (Modifikation einer Funktion)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x - x^2,\ x \in [\frac{1}{2}, \infty)$.

a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x)$ im angegebenen Bereich injektiv ist.

b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

c) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von $f^{-1}(x)$ an.

Lösung Aufgabe 1:

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x - x^2,\ x \in [\frac{1}{2}, \infty)$.

a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x)$ im angegebenen Bereich injektiv ist.

b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

c) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von $f^{-1}(x)$ an.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Skizzieren Sie den Graphen von

a) $f(x) = (x+1)^3 + 1$, indem Sie mit x^3 starten und entsprechend modifizieren.

b) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos\left[\pi(x-1)\right]$ und geben Sie Periode und Amplitude an.

Lösung Aufgabe 2):

Skizzieren Sie den Graphen von

a) $f(x) = (x+1)^3 + 1$, indem Sie mit x^3 starten und entsprechend modifizieren.

b) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos[\pi(x-1)]$ und geben Sie Periode und Amplitude an.

Blatt 14

(Funktionen von mehreren Variablen, Luchsinger/Storrer 22+23)

Lernziele: Sie können

- partielle Ableitungen berechnen.
- relative/lokale Extrema bestimmen.

Motivation:

Was für Beispiele von Funktionen kennen Sie, welche von zwei oder mehreren Variablen abhängig sind?

-

-

Vorwissen:

Die ersten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ bezeichnen wir mit:

Kandidaten für relative Extrema:

Zur Unterstützung:
Luchsinger/Storrer, Seite 349 (Überblick)
Luchsinger/Storrer, Seite 360 (relative/lokale Extrema berechnen)

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 1 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von

a) $f(x, y) = (6 - x - y)x^2y^3$.

b) $g(r, s) = \ln(r^2 + rs + 1)$.

c) $h(u, v) = \arctan \sqrt{u^2 + v^2}$.

Lösung Aufgabe 1:

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von

a) $f(x, y) = (6 - x - y)x^2y^3$.

b) $g(r, s) = \ln(r^2 + rs + 1)$.

c) $h(u, v) = \arctan\sqrt{u^2 + v^2}$.

Sie haben nun 5-10 Minuten Zeit, um zu versuchen Aufgabe 2 selber zu lösen. Danach wird die Aufgabe vom Übungsleiter an der Tafel gelöst.

Aufgabe 2:

Gegeben ist eine Funktion von zwei Variablen. Gesucht sind, wenn vorhanden, die relativen Extrema.

$$f(x, y) = 3x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 2y + 1.$$

Lösung Aufgabe 2):

Gegeben ist eine Funktion von zwei Variablen. Gesucht sind, wenn vorhanden, die relativen Extrema.

$$f(x,y) = 3x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 2y + 1.$$