

# Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

## 6. Ausgewählte Verteilungen (Distributions)

Dies ist Ihr wichtigstes Kapitel für die Prüfung! Alle Resultate zu allen Verteilungen sind hier zusammengefasst und dürfen benutzt werden, auch wenn wir sie nicht in der Vorlesung benutzt haben (zB  $E[\chi_n^2] = n$ , siehe später).

Wir präsentieren hier viele Resultate, welche wir aus Zeitgründen nicht alle nachprüfen. Viele der nachfolgenden Resultate sind bereits bekannt und werden hier nur kompakt zusammengefasst, sodass wir relativ rasch voranschreiten werden; bitte zu Hause in Ruhe durchlesen. Es kommen auch Verteilungen vor, welchen wir bis jetzt noch nicht begegnet sind. Wir werden diese Teile in unterer Zusammenfassung nochmals repetieren, sobald wir auf diese Verteilungen stossen; es ist also nicht gravierend, wenn man einzelne Teile (noch) nicht versteht.

Die StudentInnen lernen hier, wie Wahrscheinlichkeitsfunktionen ( $P[X = k]$ ) oder Dichten ( $f(x)$ ) der wichtigsten Verteilungen aussehen. Wir werden dies in der Statistik (Abkehrungsbereiche bei Tests) intensiv brauchen. Für Ihr weiteres Studium gilt: je mehr Verteilungen Sie kennen, desto besser können Sie die Wirklichkeit modellieren.

### 6.1 Diskrete Verteilungen

#### 6.1.1 Bernoulli $\text{Be}(p)$ ; **R:** binom mit $n = 1$

$X$  kann 2 Werte annehmen: 0 und 1 (alternativ auch  $-1$  und  $+1$ ).  $P[X = 1] = p$  (Erfolg) und  $P[X = 0] = 1 - p$  (Misserfolg).  $E[X] = p$  und  $V[X] = p(1 - p)$ . Mit  $0 \leq k \leq 1$  haben wir

$$P[X = k] = p^k(1 - p)^{1-k}.$$

Dies ist in der Tat gleichwertig wie oben (rechne), zielt aber bereits auf die  $\text{Bin}(n, p)$ .

### 6.1.2 Binomial $\text{Bin}(n,p)$ ; Storrer Kapitel 38, 51.1; R: binom

Seien  $X_i, 1 \leq i \leq n$ ,  $n$  iid  $\text{Be}(p)$ -Zufallsgrößen. Sei  $Y := \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann hat  $Y$  per Definition die Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p$ ;  $\text{Bin}(n,p)$ .  $E[Y] = np$  (Bemerkung zu Lemma 5.3) und  $V[Y] = np(1-p)$  (Bemerkung zu Lemma 5.5).  $0 \leq k \leq n$ :

$$P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Einsatz: Anzahl Erfolge ( $k$ ) bei  $n$  unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ .

### 6.1.3 Geometrisch $\text{Ge}(p)$ ; Storrer (37.12 b)); R: geom

Bei dieser Verteilung interessieren wir uns für den Zeitpunkt des ersten Erfolgs.  $Z$  ist eine Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen ohne die Null. Wir haben

$$P[Z = k] = p(1-p)^{k-1}.$$

Es gilt  $E[Z] = 1/p$  (das merkt man sich am Besten mit dem Würfel:  $1/p = 1/(1/6) = 6$  - es braucht durchschnittlich 6 Würfe, bis eine 6 kommt, aus Symmetriegründen) und  $V[Z] = (1-p)/p^2$ .

Die  $\text{Ge}(p)$  hat die Eigenschaft, dass sie die einzige diskrete Zufallsgrösse ist, welche *gedächtnislos* ist: mit  $n > m > 0$  gilt hier

$$P[Z > n | Z > m] = P[Z > (n - m)].$$

”Gegeben, es hat schon  $m = 1000$  Würfe ohne 6 (=Erfolg) gegeben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sogar insgesamt mindestens  $n = 1004$  Würfe ohne 6 geben wird? Also dies ist nur noch von der Differenz  $n - m = 4$  abhängig. Wie lange es bereits keine 6 gegeben hat, ist egal!”

Es sei noch erwähnt, dass die geometrische Verteilung in gewissen Lehrbüchern - und in  $\mathbb{R}$  - so definiert wird, dass man die Anzahl Misserfolge bis zum ersten Erfolg zählt. Dann nimmt die  $\text{Ge}(p)$  Werte auf den natürlichen Zahlen *inklusive* die 0 an. Die Resultate sind analog aber leicht komplizierter.

Woher kommt der Name "Geometrisch"?

#### 6.1.4 Poisson $\text{Po}(\lambda)$ ; Storrer Kapitel 39, 51.2; R: pois

Eine Zufallsgrösse  $X$  ist *poissonsches*, wenn sie Werte auf den natürlichen Zahlen inklusive 0 annimmt und zwar mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

$E[X] = V[X] = \lambda$  (E: Bsp 3 in 5.1). Motivation Poissonverteilung in Kapitel 7; en bref:

\* bis jetzt wird gesagt: "Sei  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ ": einfach lösen, ohne Motivation zu kennen

\* später in Kapitel 7, Motivation geht über folgende Punkte:

1. Situation, wo erste Idee  $\text{Bin}(n, p)$ , zB # Hausbrände in CH pro Jahr, # Meteoriteneinschläge pro Jahr, # Flugzeugabstürze pro Jahr
2.  $n$  gross und  $p$  klein
3. Kapitel 7: nehme stattdessen  $\text{Po}(\lambda)$ , da einfacher und nur 1 Parameter statt 2
4.  $\lambda$  so, dass  $E[\text{Bin}(n, p)] = E[\text{Po}(\lambda)]$ , das heisst  $np = \lambda$  (manchmal kennt man eher  $\lambda$  und nicht  $np$  (Meteoriteneinschläge))

## 6.2 Stetige Verteilungen

### 6.2.1 Uniform $U[a, b]$ ; **R:** unif - auch Gleichverteilung / Rechteckverteilung

Die einfachste stetige Verteilung ist die Uniform-Verteilung: Eine Zufallsgrösse  $U$  ist per Definitionem auf dem Intervall  $[a, b]$  uniform verteilt, wenn  $U$  folgende Dichtefunktion hat:

$$f(u) = (b - a)^{-1},$$

wobei dann natürlich  $a \leq u \leq b$  zu gelten hat. Ausserhalb von  $[a, b]$  ist die Dichte gleich null. Es gilt  $E[U] = (a + b)/2$  (2. Beispiel von 5.1) und  $V[U] = (b - a)^2/12$  (Beispiel 6 in 5.1):

### 6.2.2 (Negativ-) Exponential $\text{Exp}(\lambda)$ ; Storrer (40.8); **R:** exp

Eine Zufallsgrösse  $X$  mit Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

heisst exponentialverteilt mit Parameter (oder Rate)  $\lambda$ ;  $\text{Exp}(\lambda)$ . Es gilt  $E[X] = 1/\lambda$  und  $V[X] = 1/\lambda^2$ . Es macht Sinn, dass die erwartete Zeit bis zum (nächsten) Ereignis umgekehrt proportional zur Rate sein muss. Modell für: Zeit bis radioaktiver Zerfall, "wann geht eine Glühbirne kaputt?", Zwischenzeit bei der Ankunft von KundInnen in einem Geschäft und vieles mehr.

Die  $\text{Exp}(\lambda)$  hat die Eigenschaft, dass sie die einzige stetige Zufallsgrösse ist, welche *gedächtnislos* ist: mit  $t > s > 0$  gilt hier

$$P[X > t | X > s] = P[X > (t - s)].$$

”Gegeben, es hat schon  $s = 1000$  Sekunden keinen Atomzerfall gegeben, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sogar insgesamt mindestens  $t = 1004$  Sekunden keinen Atomzerfall geben wird? Also dies ist nur noch von der Differenz  $t - s = 4$  Sekunden abhängig. Wie lange es bereits keinen Atomzerfall gegeben hat, ist egal!”

Gemeinsamkeiten von  $\text{Ge}(p)$  und  $\text{Exp}(\lambda)$  und Konsequenzen (Signalwort ist (Übergangs- oder Warte-)Zeit bis):

**6.2.3 Normal  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ; auch Gauss-, Glocken-, Bell-, Forrest Gump-Verteilung, Storrer Kapitel 41; neu zu lesen: (41.3)-(41.7), 51.3; R: norm**

**Vorsicht: Storrer und R  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , Luchs  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$**

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes (siehe Kapitel 7) ist die Normalverteilung sehr wichtig: Mit Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt  $E[X] = \mu$  (Beispiel 4 in 5.1) und  $V[X] = \sigma^2$  (Beispiel 8 in 5.1).

“Z-Transform” [Beweis Storrer (41.3)]: Wenn  $X$  eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung hat, dann hat

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (\text{Z - Transform})$$

eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung (welche in Büchern und Libraries von Statistik-Paketen abgelegt ist).  $\mathcal{N}(0, 1)$  nennen wir ”Standard-Normalverteilung”. 4 Bemerkungen:

Die Z-Transform wird üblicherweise so eingesetzt, dass danach eine *Standard*-Normalverteilung resultiert. Man kann aber auch beliebig Konstanten addieren und mit Konstanten multiplizieren, die Zufallsgrösse bleibt zumindest normalverteilt.

Wir machen dazu noch 3 Bilder (Zentrieren und Normalisieren = Standardisieren):

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(10, 4)$ -Zufallsgrösse. Formen Sie  $P[X > 13]$  soweit um, dass Sie den Wert in einer Tabelle ablesen können.

Storrer Aufgabe 41-3 und 41-6.



Approximative Formeln aus der Praxis: sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse. Dann gelten  $P[|X| > 1] \doteq 1/3$  und  $P[|X| > 2] \doteq 5\%$ , zwei Bilder, auswendig:

Allgemein gilt wegen der Z-Transform (rechnen Sie es selber nach!): Eine Normalverteilung hat etwa  $2/3$  ihrer Wahrscheinlichkeit innerhalb 1 Standardabweichung vom Mittelwert entfernt (genauer, siehe Tabelle:  $\approx 68\%$ ) und sogar  $95\%$  ihrer Wahrscheinlichkeit innerhalb von 2 Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt:

Theorie:  $\mu \pm 2\sigma$  : 95% der Daten

Praxis:  $\bar{x} \pm 2\hat{\sigma}$  : 95% der Daten

Der Unterschied zwischen Theorie und Praxis ist in der Theorie kleiner als in der Praxis...  
Alles obige gilt streng genommen nur bei  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ; aber wegen CLT (Kapitel 7) auch viel allgemeiner!

#### 6.2.4 $\chi^2$ ; Storrer Kapitel 47, 51.5; R: chisq

Diese Verteilung ist in der Statistik zentral wichtig und verdankt ihre Bedeutung weitgehend dem zentralen Grenzwertsatz (Kapitel 7), insbesondere, dass man in Modellen der Datenanalyse Fehlerterme häufig normalverteilt modelliert. Wenn  $(X_i)_{i=1}^n$  iid  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt sind, dann ist

$$\sum_{i=1}^n X_i^2$$

$\chi_n^2$ -verteilt (sprich "Chiquadrat mit n Freiheitsgraden" (degree of freedom, df)):

Wenn  $(Y_i)_{i=1}^n$  iid  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt sind, dann hat wegen der Z-Transformation

$$\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

die  $\chi_n^2$ -Verteilung. Ein wenig überraschend: Mit

$$S^2 := \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

wo  $\bar{Y} := \sum_{i=1}^n Y_i/n$ , hat  $S^2/\sigma^2$  die  $\chi_{n-1}^2$ -Verteilung. Eine Bauernregel sagt: ein df geht verloren pro Parameter, den man schätzt ( $\mu$  wird mit  $\bar{Y}$  geschätzt). Die Dichte der  $\chi_n^2$ -Verteilung ist

$$f(x) := \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}}, \quad x \geq 0. \quad (\text{Monster I})$$

$E[\chi_n^2] = n; V[\chi_n^2] = 2n$ . Bilder zur Dichte in Storrer (47.2).

In Anbetracht der Definition ist es nicht überraschend, dass, wenn  $X$  eine  $\chi_a^2$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine  $\chi_b^2$ -Zufallsgrösse ist und  $X$  und  $Y$  unabhängig voneinander sind, dann ist  $W := X + Y$  eine  $\chi_{a+b}^2$ -Zufallsgrösse.

### 6.2.5 F; R: f

Seien  $U$  und  $V$  zwei unabhängige,  $\chi_m^2$ -, bzw.  $\chi_n^2$ -verteilte Zufallsgrössen. Dann ist der Ausdruck

$$W := \frac{U/m}{V/n}$$

$F$ -verteilt mit Parametern  $m, n$ :  $F_{m,n}$ . Diese Zufallsgrössen kommen in Kapitel 10 vor.

Für  $x \geq 0$  haben wir die Dichtefunktion (Monster II)

$$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2] (m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}$$

Es gilt  $E[W] = n/(n-2)$  (falls  $n > 2$ ), also etwa 1 und

$V[W] = [2n^2(m+n-2)]/[m(n-2)^2(n-4)]$  (falls  $n > 4$ ).

### 6.2.6 t; Storrer Kapitel 45-46, 51.4; R: t

Sei  $Y$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse und  $Z$  eine  $\chi_n^2$ -Zufallsgrösse;  $Y$  unabhängig von  $Z$ .

$$T_n := \frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$$

ist dann fast  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt, aber nicht genau, die genaue Verteilung ist Student- $t$ -Verteilung mit  $n$  df. Die Dichte der  $t_n$ -Verteilung ist (Monster III)

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt  $E[t_n] = 0$  (falls  $n > 1$  und falls  $n = 1$  existiert der Erwartungswert nicht),  $V[t_n] = n/(n-2)$ , sobald  $n > 2$ . Man sieht sofort, dass " $\sqrt{F_{1,n}} = |t_n|$ ".  $t_\infty = \mathcal{N}(0, 1)$ , siehe Tabellen in (51.4).

3 Arten von Tabellen im Storrer, bzw im Web (F-Tabelle):

**$\mathcal{N}$ :**

\* via Z-Transform: von  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  nach  $\mathcal{N}(0, 1)$  transformierbar, deshalb brauchen wir nur 1 Tabelle für  $\mathcal{N}$  mit "allen" Werten; "allen" heisst bis auf die Gitter-/Maschenbreite von mindestens 0.02 bei uns.

**$\chi^2$  und  $t$ :**

\* haben 1 df,  $n, n \geq 1$ , bei  $\chi_n^2$  und  $t_n$

\* deshalb Tabelle mit Zeilen von diversen df und Spalten mit häufigen  $\alpha$  (6 pro df), nicht "alle" Werte wie bei  $\mathcal{N}$ .

\* häufig -1 df bei Daten  $x_1, \dots, x_n$

**F:**

\* hat 2 df,  $m, n$  je  $\geq 1$ ; deshalb  $F_{m,n}$

\* Tabelle mit Zeilen und Spalten von je eigenen df ( $m, n$ ); relevanter Wert ist dann im "Fadenkreuz"; nur ein  $\alpha = 0.05$  bzw 0.95. Weil wir die F-Verteilung bei der ANOVA brauchen, kann in der Prüfung keine ANOVA verlangt sein, wenn wir kein  $\alpha = 0.05/0.95$  haben (ausser P-Wert (später) gegeben).

\* häufig je -1 df bei Daten  $x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n$ .

### 6.3 Zusammenhänge bei Verteilungen I: $\sum$ von *unabhängigen* Zufallsgrößen

Die Summanden in den folgenden Summen müssen immer unabhängig sein. Wenn nicht anders erwähnt, fordern wir auch die gleiche Verteilung. Mit kompakten Formeln wie

$$\sum_1^n Be(p) = Bin(n, p)$$

weiter unten ist eigentlich gemeint: Seien  $X_1, \dots, X_n$  iid  $Be(p)$ -verteilt. Dann hat

$$Y := \sum_{i=1}^n X_i$$

eine  $Bin(n, p)$ -Verteilung.

\* Summe von Bernoulli ist Binomial

$$\sum_1^n Be(p) = Bin(n, p)$$

\* Grosser Bruder hiervon: Summe von Binomial ist Binomial ( $p$  muss immer gleich sein!)

$$\sum_1^n Bin(n_i, p) = Bin\left(\sum_1^n n_i, p\right)$$

\* Summe von Normal ist Normal (Summanden müssen nicht mal identisch verteilt sein)

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

$\mu$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2	0.819	0.164	0.016	0.001	0.000						
0.4	0.670	0.268	0.054	0.007	0.001	0.000					
0.6	0.549	0.329	0.099	0.020	0.003	0.000					
0.8	0.449	0.359	0.144	0.038	0.008	0.001	0.000				
1.0	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	0.001	0.000			
1.2	0.301	0.361	0.217	0.087	0.026	0.006	0.001	0.000			
1.4	0.247	0.345	0.242	0.113	0.039	0.011	0.003	0.001	0.000		
1.6	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005	0.001	0.000		
1.8	0.165	0.298	0.268	0.161	0.072	0.026	0.008	0.002	0.000		
2.0	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.012	0.003	0.001	0.000	
2.2	0.111	0.244	0.268	0.197	0.108	0.048	0.017	0.005	0.002	0.000	
2.4	0.091	0.218	0.261	0.209	0.125	0.060	0.024	0.008	0.002	0.001	0.000
2.6	0.074	0.193	0.251	0.218	0.141	0.074	0.032	0.012	0.004	0.001	0.000
2.8	0.061	0.170	0.238	0.222	0.156	0.087	0.041	0.016	0.006	0.002	0.000
3.0	0.050	0.149	0.224	0.224	0.168	0.101	0.050	0.022	0.008	0.003	0.001
3.2	0.041	0.130	0.209	0.223	0.178	0.114	0.061	0.028	0.011	0.004	0.001
3.4	0.033	0.113	0.193	0.219	0.186	0.126	0.072	0.035	0.015	0.006	0.002
3.6	0.027	0.098	0.177	0.212	0.191	0.138	0.083	0.042	0.019	0.008	0.003
3.8	0.022	0.085	0.162	0.205	0.194	0.148	0.094	0.051	0.024	0.010	0.004
4.0	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104	0.060	0.030	0.013	0.005
4.2	0.015	0.063	0.132	0.185	0.194	0.163	0.114	0.069	0.036	0.017	0.007
4.4	0.012	0.054	0.119	0.174	0.192	0.169	0.124	0.078	0.043	0.021	0.009
4.6	0.010	0.046	0.106	0.163	0.188	0.173	0.132	0.087	0.050	0.026	0.012
4.8	0.008	0.040	0.095	0.152	0.182	0.175	0.140	0.096	0.058	0.031	0.015
5.0	0.007	0.034	0.084	0.140	0.175	0.175	0.146	0.104	0.065	0.036	0.018
5.2	0.006	0.029	0.075	0.129	0.168	0.175	0.151	0.113	0.073	0.042	0.022
5.4	0.005	0.024	0.066	0.119	0.160	0.173	0.156	0.120	0.081	0.049	0.026
5.6	0.004	0.021	0.058	0.108	0.152	0.170	0.158	0.127	0.089	0.055	0.031
5.8	0.003	0.018	0.051	0.098	0.143	0.166	0.160	0.133	0.096	0.062	0.036
6.0	0.002	0.015	0.045	0.089	0.134	0.161	0.161	0.138	0.103	0.069	0.041
6.2	0.002	0.013	0.039	0.081	0.125	0.155	0.160	0.142	0.110	0.076	0.047
6.4	0.002	0.011	0.034	0.073	0.116	0.149	0.159	0.145	0.116	0.082	0.053
6.6	0.001	0.009	0.030	0.065	0.108	0.142	0.156	0.147	0.121	0.089	0.059
6.8	0.001	0.008	0.026	0.058	0.099	0.135	0.153	0.149	0.126	0.095	0.065
7.0	0.001	0.006	0.022	0.052	0.091	0.128	0.149	0.149	0.130	0.101	0.071
7.2	0.001	0.005	0.019	0.046	0.084	0.120	0.144	0.149	0.134	0.107	0.077
7.4	0.001	0.005	0.017	0.041	0.076	0.113	0.139	0.147	0.136	0.112	0.083
7.6	0.001	0.004	0.014	0.037	0.070	0.106	0.134	0.145	0.138	0.117	0.089
7.8	0.000	0.003	0.012	0.032	0.063	0.099	0.128	0.143	0.139	0.121	0.094
8.0	0.000	0.003	0.011	0.029	0.057	0.092	0.122	0.140	0.140	0.124	0.099
8.2	0.000	0.002	0.009	0.025	0.052	0.085	0.116	0.136	0.139	0.127	0.104
8.4	0.000	0.002	0.008	0.022	0.047	0.078	0.110	0.132	0.138	0.129	0.108
8.6	0.000	0.002	0.007	0.020	0.042	0.072	0.103	0.127	0.137	0.131	0.112
8.8	0.000	0.001	0.006	0.017	0.038	0.066	0.097	0.122	0.134	0.131	0.116
9.0	0.000	0.001	0.005	0.015	0.034	0.061	0.091	0.117	0.132	0.132	0.119

$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$
-4.00	0.0000	-1.10	0.1357	0.02	0.5080	1.12	0.8686
-3.90	0.0000	-1.08	0.1401	0.04	0.5160	1.14	0.8729
-3.80	0.0001	-1.06	0.1446	0.06	0.5239	1.16	0.8770
-3.70	0.0001	-1.04	0.1492	0.08	0.5319	1.18	0.8810
-3.60	0.0002	-1.02	0.1539	0.10	0.5398	1.20	0.8849
-3.50	0.0002	-1.00	0.1587	0.12	0.5478	1.22	0.8888
-3.40	0.0003	-0.98	0.1635	0.14	0.5557	1.24	0.8925
-3.30	0.0005	-0.96	0.1685	0.16	0.5636	1.26	0.8962
-3.20	0.0007	-0.94	0.1736	0.18	0.5714	1.28	0.8997
-3.10	0.0010	-0.92	0.1788	0.20	0.5793	1.30	0.9032
-3.00	0.0013	-0.90	0.1841	0.22	0.5871	1.32	0.9066
-2.90	0.0019	-0.88	0.1894	0.24	0.5948	1.34	0.9099
-2.80	0.0026	-0.86	0.1949	0.26	0.6026	1.36	0.9131
-2.70	0.0035	-0.84	0.2005	0.28	0.6103	1.38	0.9162
-2.60	0.0047	-0.82	0.2061	0.30	0.6179	1.40	0.9192
-2.50	0.0062	-0.80	0.2119	0.32	0.6255	1.42	0.9222
-2.45	0.0071	-0.78	0.2177	0.34	0.6331	1.44	0.9251
-2.40	0.0082	-0.76	0.2236	0.36	0.6406	1.46	0.9279
-2.35	0.0094	-0.74	0.2296	0.38	0.6480	1.48	0.9306
-2.30	0.0107	-0.72	0.2358	0.40	0.6554	1.50	0.9332
-2.25	0.0122	-0.70	0.2420	0.42	0.6628	1.55	0.9394
-2.20	0.0139	-0.68	0.2483	0.44	0.6700	1.60	0.9452
-2.15	0.0158	-0.66	0.2546	0.46	0.6772	1.65	0.9505
-2.10	0.0179	-0.64	0.2611	0.48	0.6844	1.70	0.9554
-2.05	0.0202	-0.62	0.2676	0.50	0.6915	1.75	0.9599
-2.00	0.0228	-0.60	0.2743	0.52	0.6985	1.80	0.9641
-1.95	0.0256	-0.58	0.2810	0.54	0.7054	1.85	0.9678
-1.90	0.0287	-0.56	0.2877	0.56	0.7123	1.90	0.9713
-1.85	0.0322	-0.54	0.2946	0.58	0.7190	1.95	0.9744
-1.80	0.0359	-0.52	0.3015	0.60	0.7257	2.00	0.9772
-1.75	0.0401	-0.50	0.3085	0.62	0.7324	2.05	0.9798
-1.70	0.0446	-0.48	0.3156	0.64	0.7389	2.10	0.9821
-1.65	0.0495	-0.46	0.3228	0.66	0.7454	2.15	0.9842
-1.60	0.0548	-0.44	0.3300	0.68	0.7517	2.20	0.9861
-1.55	0.0606	-0.42	0.3372	0.70	0.7580	2.25	0.9878
-1.50	0.0668	-0.40	0.3446	0.72	0.7642	2.30	0.9893
-1.48	0.0694	-0.38	0.3520	0.74	0.7704	2.35	0.9906
-1.46	0.0721	-0.36	0.3594	0.76	0.7764	2.40	0.9918
-1.44	0.0749	-0.34	0.3669	0.78	0.7823	2.45	0.9929
-1.42	0.0778	-0.32	0.3745	0.80	0.7881	2.50	0.9938
-1.40	0.0808	-0.30	0.3821	0.82	0.7939	2.60	0.9953
-1.38	0.0838	-0.28	0.3897	0.84	0.7995	2.70	0.9965
-1.36	0.0869	-0.26	0.3974	0.86	0.8051	2.80	0.9974
-1.34	0.0901	-0.24	0.4052	0.88	0.8106	2.90	0.9981
-1.32	0.0934	-0.22	0.4129	0.90	0.8159	3.00	0.9987
-1.30	0.0968	-0.20	0.4207	0.92	0.8212	3.10	0.9990
-1.28	0.1003	-0.18	0.4286	0.94	0.8264	3.20	0.9993
-1.26	0.1038	-0.16	0.4364	0.96	0.8315	3.30	0.9995
-1.24	0.1075	-0.14	0.4443	0.98	0.8365	3.40	0.9997
-1.22	0.1112	-0.12	0.4522	1.00	0.8413	3.50	0.9998
-1.20	0.1151	-0.10	0.4602	1.02	0.8461	3.60	0.9998
-1.18	0.1190	-0.08	0.4681	1.04	0.8508	3.70	0.9999
-1.16	0.1230	-0.06	0.4761	1.06	0.8554	3.80	0.9999
-1.14	0.1271	-0.04	0.4840	1.08	0.8599	3.90	1.0000
-1.12	0.1314	-0.02	0.4920	1.10	0.8643	4.00	1.0000
		0.00	0.5000				



$\nu$	$\alpha$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1		1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828
2		3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816
3		4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266
4		5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.467
5		7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.515
6		8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458
7		9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8		11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9		12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10		13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11		14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12		15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13		16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14		18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15		19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16		20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17		21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18		22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19		23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20		25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21		26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22		27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23		28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24		29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25		30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26		31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27		32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28		34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.892
29		35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30		36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703
40		47.3	51.8	55.8	60.4	63.7	73.4
50		58.2	63.2	67.5	72.6	76.2	86.7
60		69.0	74.4	79.1	84.6	88.4	99.6
80		90.4	96.6	101.9	108.1	112.3	124.8
100		111.7	118.5	124.3	131.1	135.8	149.5
150		164.3	172.6	179.6	187.7	193.2	209.3
200		216.6	226.0	234.0	243.2	249.4	267.6
$Z_\alpha$		0.842	1.282	1.645	2.054	2.326	3.090

$\nu$	$\alpha$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1		3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14		1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16		1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35		1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40		1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45		1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50		1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60		1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70		1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80		1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90		1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100		1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
1000		1.282	1.645	1.962	2.330	2.581	3.300
$\infty$		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291
*		0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005

\*: Signifikanzschwellen für den einseitigen Test.