Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

5. ERWARTUNGSWERT E UND VARIANZ V

vgl Kapitel 2: $\bar{x}$ und $\hat{\sigma}^2$

5.1 Erwartungswert und Varianz einer diskreten und stetigen Zufallsgrösse

Ziele dieses Teils:

* Die StudentInnen kennen die Definition des Erwartungswerts / der Varianz von diskreten und stetigen Zufallsgrössen.
* Sie können einfache Erwartungswerte / Varianzen selber berechnen (**Prüfung Aufgabe 3!**) und kennen weitere Erwartungswerte / Varianzen von bekannten Zufallsgrössen (mehr dazu in Kapitel 6).
* Gefühl für Erwartungswerte / Varianzen (z.B. Schwerpunkt; "normalerweise" etwas wie "mittlerer Wert")

Falls wir Daten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haben (mehr dazu in 5.3), können wir einen sogenannten **Stichproben-Mittelwert** berechnen:

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Es ist denkbar, dass einige der x_i den gleichen Wert darstellen. Wir könnten also obiges $\overline{x}$ umschreiben, indem wir über alle vorkommenden Werte von x summieren und mit H_x angeben, wie häufig Wert x vorgekommen ist. Damit erhalten wir:

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{\text{alle } x} xH_x = \sum_{\text{alle } x} x\frac{H_x}{n}.$$

Warum haben wir $\overline{x} = \sum_{\text{alle } x} x\frac{H_x}{n}$ betrachtet? Weil

$$\frac{H_x}{n}$$

die *relative* Häufigkeit darstellt: wie häufig kommt x in n Daten vor, geteilt durch n. Wir werden in Kapitel 7 sehen, dass diese Grösse gegen die wahre Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis konvergiert,

$$P[X = x],$$

wenn $n \to \infty$. Deshalb definieren wir:

Definition 5.1 [Erwartungswert (Expectation, mean) einer diskreten und stetigen Zufallsgrösse] *Der Erwartungswert $E[X]$ einer Zufallsgrösse X ist definiert als*

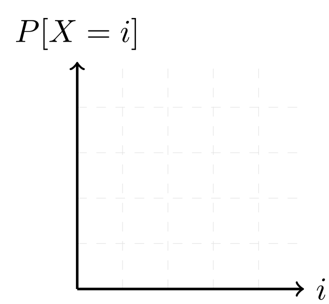
$$E[X] := \begin{cases} \sum_{x_i} x_i P[X = x_i] & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig.} \end{cases}$$

Die Definitionen gelten, falls die Summe bzw. das Integral existiert (in MAT183 immer, ausser thematisiert). Dabei wird jeweils über den gesamten Wertebereich der Zufallsgrösse summiert respektive integriert.

Bemerkungen 1. Eine andere Bezeichnung für Erwartungswert ist *Mittelwert.*

2. Obschon wir im täglichen Leben oft mit Erwartungswerten argumentieren, ist es gar nicht so einfach, zu verstehen, was das genau ist. Definition 5.1 ist algebraisch (eine Summe) bzw. von der Analysis her (ein Integral) klar. Physikalisch ist der Mittelwert ein Schwerpunkt. Die Wahrscheinlichkeiten sind dann Gewichte bzw. Gewichtsverteilungen, was in Bemerkung 3 klar wird.

3. Die Zufallsgrösse muss den Erwartungswert nicht annehmen: "Reality differs from Expectations!" Dazu noch das einfache Beispiel von Be(p)=Bin($1, p$) - dies ist die Bernoulli-Zufallsgrösse (Binomial mit $n = 1$, nur 1 Versuch) - wo $p \in (0, 1)$ und $P[X = 0] = 1 - p$, $P[X = 1] = p$. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgrösse:

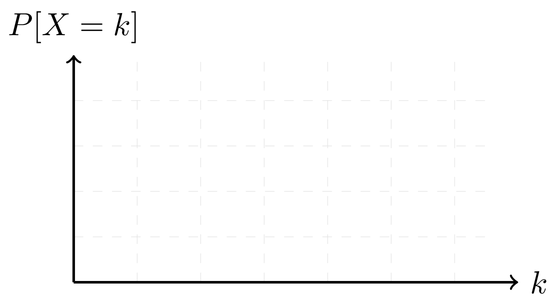


Er wird offenbar von X *nie* angenommen, weil X entweder 0 oder 1 ist.

Notation: runde vs eckige Klammer ist egal: wie bei $P[A] = P(A)$; gilt jetzt hier auch bei Erwartungswert und später Varianz: $E[X] = E(X)$ und $V[X] = V(X)$.

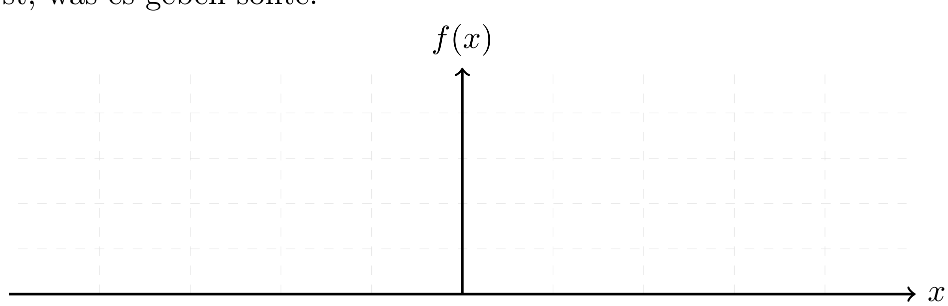
Beispiele I

1. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl Augen beim Wurf eines perfekten Würfels. Überlegen Sie sich zuerst, was es geben sollte.



Wir brauchen von MAT182 für die Rechnung: $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer $U[-2, 1]$-Zufallsgrösse. Überlegen Sie sich zuerst, was es geben sollte.



Meist ist es bei der Berechnung von Erwartungswerten von immensem Vorteil, wenn man schon weiss, was es geben sollte. Klassisches Beispiel dazu ist die Poisson-Zufallsgrösse (sie wird in Kapitel 7 ausführlich motiviert). Wenn man weiss, dass der Erwartungswert λ ist, ist es einfacher:

3. Erwartungswert einer Po(λ)-Zufallsgrösse, $\lambda > 0$: Eine Poisson-Zufallsgrösse hat die Verteilung:

$$P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k \geq 0.$$

Wir sollten überprüfen, ob dies eine Verteilung ist:

Jetzt steigen wir folgendermassen ein:

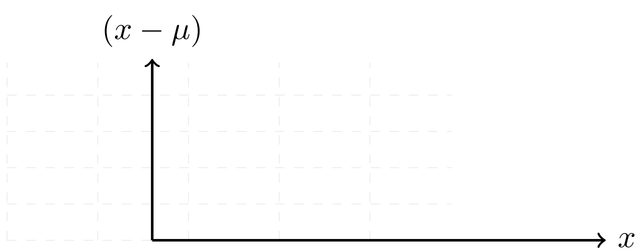
$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k\geq 0} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0} k\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1} k\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1} k\frac{\lambda^{k-1}}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

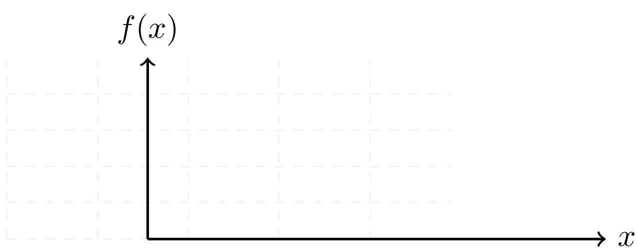
4. Auf Übungsblatt 7 sind weitere Erwartungswerte zu berechnen. Wir fügen hier noch ein gerechnetes Beispiel an, nämlich den Erwartungswert einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse. Der Erwartungswert sollte definitionsgemäss μ sein. Die Dichte ist:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}.$$

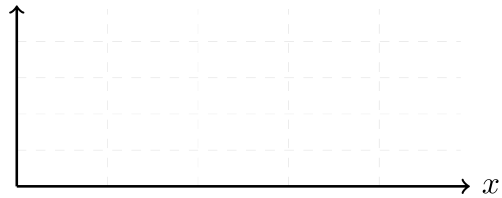
Damit steigen wir folgendermassen ein (ausführlicher Buch (5.10.6)):

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)+\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx + \mu \\
&= 0 + \mu = \mu.
\end{aligned}$$

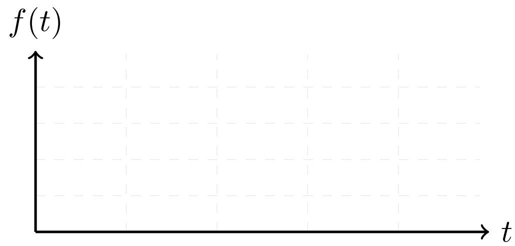


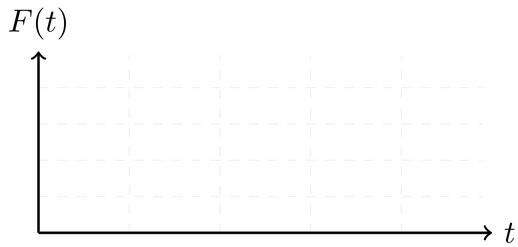


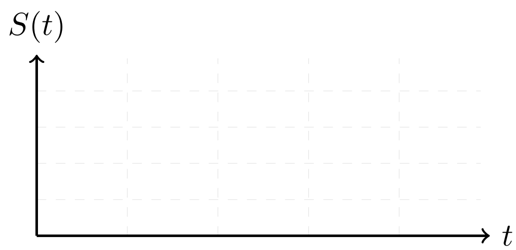
Produkt von obigen



Exponentialverteilung revisited:

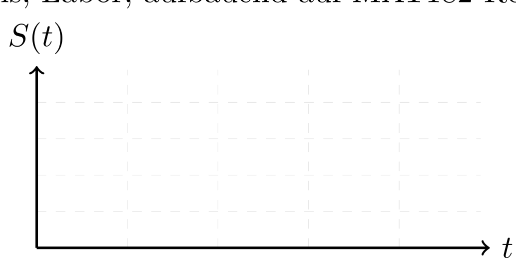






$\frac{1}{\lambda}$ ist reziprok zu λ und das macht Sinn: Rate, Kadenz λ, zB 10 pro Sekunde, bedeutet 0.1 Sekunden bis nächstes Ereignis.

Praxis, Labor, aufbauend auf MAT182-Resultaten:



Offenbar ist der Erwartungswert *ein* Mass für die **Lage** der Zufallsgrösse ("wo werden Werte etwa erwartet?"). Wir werden jetzt *ein* Mass für die **Streuung** der Zufallsgrösse um diesen Erwartungswert kennenlernen.

Definition 5.2 [Varianz (Variance) und Standardabweichung (Standard Deviation) einer diskreten und stetigen Zufallsgrösse] *Mit $\mu_X := E[X]$ definieren wir die Varianz $V[X]$ einer Zufallsgrösse X als*

$$V[X] := \begin{cases} \sum_{x_i}(x_i - \mu_X)^2 P[X = x_i] & X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^2 f(x)dx & X \text{ stetig.} \end{cases}$$

*Dabei wird auch hier über den gesamten Wertebereich der Zufallsgrösse summiert respektive integriert. Die Standardabweichung sd (***S***tandard* **D***eviation) ist die Wurzel aus der Varianz:*

$$sd[X] := \sqrt{V[X]}.$$

Man beachte: der Ausdruck

$$\sum_{x_i}(x_i - \mu_X)^2 P[X = x_i]$$

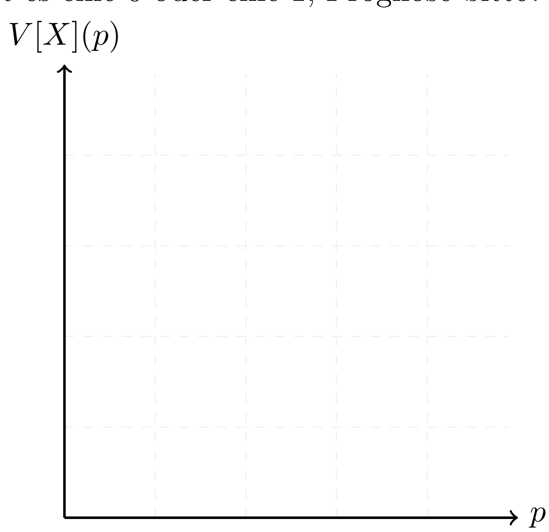
besteht aus 3 (!) Teilen. Welchen und weshalb (analog mit dem Integral)?

Bemerkung zu Definition 5.2: Varianz bzw. Standardabweichung sind *zwei* Masse für die Streuung einer Zufallsgrösse. Es gibt aber viele weitere Masse für die Streuung. Ein Beispiel ist (diskret; stetig analog) $\sum_{x_i} |x_i - \mu_X| P[X = x_i]$. Dies ist die absolute (”$|$”), erwartete (”$\sum_{x_i} \ldots P[X = x_i]$”) Abweichung vom Erwartungswert (”$x_i - \mu_X$”) (Mean absolute deviation MAD). Man verwendet aus mathematischen Gründen (einfachere Rechnungen) in der Statistik eher die Varianz anstatt die Mean absolute deviation. Wie sieht die MAD im stetigen Fall aus?

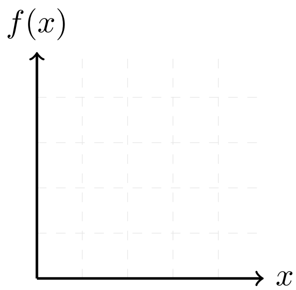
Beispiele II

5. Berechnen Sie die Varianz einer Be(p)-Zufallsgrösse, wo $p \in (0, 1)$:

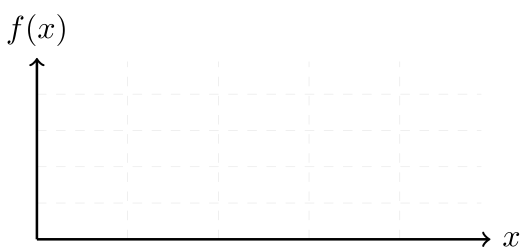
Praktische Interpretation: Varianz als Mass für Unsicherheit bei Prognosen: X sei Be(p); “Gibt es eine 0 oder eine 1, Prognose bitte?”

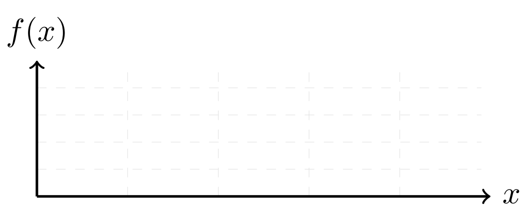


6. Berechnen Sie die Varianz einer $U[0,1]$-Zufallsgrösse:



7. Was vermuten Sie: wie wird die Varianz einer $U[0,3]$-Zufallsgrösse sein (Auflösung nach Lemma 5.4)?





8. Wir fügen hier noch ein gerechnetes Beispiel an, nämlich die Varianz einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse. Die Varianz sollte definitionsgemäss σ^2 sein. Die Dichte ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}.$$

Damit steigen wir folgendermassen ein (partielle Integration im 4. Schritt):

$$\begin{aligned}
V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y (y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}) dy \\
&= -y \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} |_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

Warum betrachtet man Summen von Zufallsgrössen?

Aufgabe 5-1 als Motivation für 5.2: Wir haben in dieser Aufgabe die diskrete Zufallsgrösse X gegeben, dann gibt es eine sogenannte *Transformation* dieser Zufallsgrösse: $Y := 2X+1$. Wir stellen das erstmal sinnvoll in einer Tabelle dar:

Nachrechnen liefert $E[X] = 2$ und $V[X] = 4.2$.

Wenn wir uns jetzt die Frage nach $E[Y], V[Y]$
stellen, so haben wir die Hoffnung, dass wir benutzen
können, dass wir schon wissen: $E[X] = 2, V[X] = 4.2$.
In der Tat kann man folgern:

$E[Y] = E[2X + 1] =$

und

$V[Y] = V[2X + 1] =$

Das wäre mühsam zu Fuss; **Gott sei Dank gibt es Rechenregeln in 5.2.**

5.2 Einige wichtige Rechenregeln

Lemma 5.3 [Linearität des Erwartungswertes]

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

Umgangssprachlich sagt man "Konstanten herausziehen" und "Summen auseinanderziehen und getrennt berechnen".

Und was machen wir, wenn wir $E[aX+b]$ berechnen müssen (p-1)? Eine Konstante b kann man auffassen als eine konstante Zufallsgrösse, welche mit Wahrscheinlichkeit 1 den Wert b annimmt: $P[X = b] = 1$. Der Erwartungswert ist damit b und die Varianz von b gleich 0. Prüfen Sie das mit Hilfe von Definitionen 5.1 und 5.2:

Damit haben wir also zum Beispiel: $E[aX + b] = aE[X] + b$.

Bemerkungen zu Lemma 5.3: 1. Wir haben gesehen, dass der Erwartungswert einer Be(p)-Zufallsgrösse gleich p ist. Die Bin(n, p)-Zufallsgrösse ist eine Summe von n Be(p)-Zufallsgrössen (sogar unabhängige Summanden!). Wegen Lemma 5.3 muss deshalb der Erwartungswert einer Bin(n, p)-Zufallsgrösse gleich np sein (direkte Berechnung im Buch **noch anpassen p 289):**

Differenzialdiagnose à la Dr. House ist zwar unterhaltsam, aber merken Sie sich bitte, Einzelfall versus Kollektiv: **Das Wahrscheinliche (grosses p) ist häufig (grosses np) und das Unwahrscheinliche (kleines p) ist selten (kleines np).**

2. Was darf man machen, was nicht?

$$E[aX+b] = aE[X]+b, \qquad E[\sin(X)] = \sin(E[X]), \qquad E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{1}{E[X]}$$

Bei Transformationen g der Art $g(x) = ax + b$, wo a und b reelle Zahlen, gilt offenbar wegen Lemma 5.3 $E[g(X)] = E[aX+b] = aE[X]+b = g(E[X])$. Dies ist aber für beliebige g im Allgemeinen falsch, zB $g(x) = \sin(x)$ oder $g(x) = x^{-1}$.

3. Sei $(X_i)_{i=1}^n$ iid mit $E[X_i] = \mu$, berechne $E[\overline{X}] := E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i]$.

Wir stellen bei der dritten Bemerkung 3 Dinge fest:

a) Der Erwartungswert von $\overline{X}$ trifft selber genau μ (NB: $\overline{X}$ *ist* eine Zufallsgrösse und hat damit selber einen Erwartungswert!).

b) Wenn $\overline{X}$ zum Schätzen von μ benutzt wird (Kapitel 8), stimmt schon mal der Erwartungswert (sog. erwartungstreue).

c) Obiges Resultat ($E[\overline{X}] = \mu$) gilt für alle Verteilungen (mit existierendem Erwartungswert): Binomial, Poisson, etc. Wir haben die konkrete Verteilung ja nirgends benutzt.

Um zu verstehen, was Modell, was Daten, muss man diese Seite verstehen; Tipp:
Übungen lösen!

Hier unterscheidet sich eine gute von einer schlechten Statistik-Ausbildung!

μ versus $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ versus $\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Alle drei heissen Mittelwert:

theoretischer Mittelwert – Mittelwert der Zufallsvariablen – Stichprobenmittelwert

1. μ: das gehört zur Theorie; in den Naturwissenschaften haben wir Naturgesetze und Naturkonstanten; die sind fest! (Gegensatz: in der Ökonomie ist μ vielleicht ein "richtiger" Zinssatz.... - der ist nicht klar und fest). Zum Beispiel die Gravitationskonstante G in

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

2. $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: am Besten folgendermassen zu verstehen:

* <u>vor</u> dem Versuch, im Büro Luchsinger bei der Aufgabenbesprechung

* 2 Studis, gleiche Aufgabe bis hier

* Modellierung: $X_i, \overline{X}$ sind "Platzhalter für die Daten, die dann kommen"

* gleiche $\overline{X}$ und beide haben $E[\overline{X}] = \mu$, siehe (p -1) und $V[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$, siehe (p +3)

3. $\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$:

* <u>nach</u> dem (Feld)Versuch

* 2 Studis, gleiche Aufgabenstellung oben aber jetzt <u>andere</u> Daten!

* Daten $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ fest, konstant, nach Versuch, andere $\overline{x}, \overline{y}$.

* unwichtig, aber richtig: $E[\overline{x}] = \overline{x}$ und $V[\overline{x}] = 0$ da $\overline{x}$ konstant.

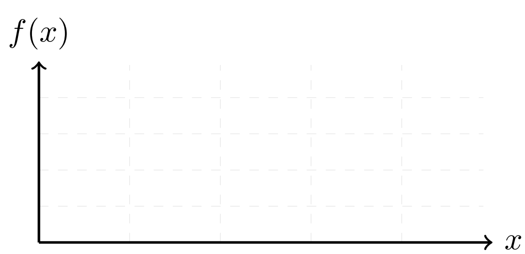
Lemma 5.4 [elementare Rechenregeln der Varianz]

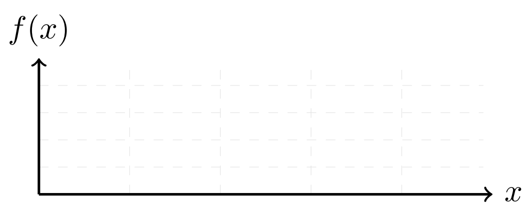
a) $V[aX+b] = a^2 V[X]$ *für* a, b *reelle Zahlen ("Konstante quadratisch raus").*

b) $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Berechnen Sie jetzt $V(-X)$:

Bemerkungen zu Lemma 5.4: 1. Wir haben uns in Beispiel 7 gefragt, wie die Varianz einer $U[0,3]$-Zufallsgrösse ist. Mit X eine $U[0,1]$-Zufallsgrösse ist $Y := 3X$ eine $U[0,3]$-Zufallsgrösse. Deshalb muss die Varianz von Y wegen Lemma 5.4 a) 9 mal grösser sein als diejenige von X (also $9/12 = 3/4$). Bilder zu den Dichten der beiden Zufallsgrössen:





2. Wegen Lemma 5.4 a) folgt mit $a \in \mathbb{R}$:

$$sd[aX] = |a| sd[X];$$

im Gegensatz zur Varianz kann man bei der Standardabweichung einen konstanten Faktor einfach herausnehmen (Absolutbetrag!). Die Varianz ist ein quadratisches Mass für die Streuung, während die Standardabweichung direkt mit der Streuung der Daten in Relation gesetzt werden kann. Deshalb:

3. In Lemma 5.4 b) kommt der Ausdruck $E[X^2]$ vor. Wie berechnet man diesen Ausdruck? Es gilt folgende Regel:

$$E[X^2] = \begin{cases} \sum_{x_i} x_i^2 P[X = x_i] & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig.} \end{cases}$$

Lemma 5.5 [Varianz einer Summe] *Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrössen (die gleiche Verteilung wird nicht gefordert!). Dann gilt:*

$$V[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]$$

("Varianz der Summe ist die Summe der Varianzen").

Berechnen Sie jetzt $V(X - Y)$, wo X und Y unabhängig voneinander sind.

Bemerkung zu Lemma 5.5: Wir haben in Beispiel 5 gesehen, dass die Varianz einer Be(p)-Zufallsgrösse gleich $p(1 - p)$ ist. Die Bin(n, p)-Zufallsgrösse ist ja eine Summe von n Be(p)-Zufallsgrössen (sogar unabhängig!). Wegen Lemma 5.5 muss deshalb die Varianz einer Bin(n, p)-Zufallsgrösse gleich $np(1-p)$ sein. Das kennen Sie eventuell aus der Mittelschule als "npq".

Wir repetieren für die Binomialverteilung $E[X] = np$, $V[X] = np(1-p)$, $sd[X] = \sqrt{V[X]} = \sqrt{np(1-p)}$ und lösen damit Aufgabe 5−11: a) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für die Binomialverteilung mit $n = 50$, $p = 0.2$. b) Eine Binomialverteilung hat den Erwartungswert 80 und die Standardabweichung 8. Wie gross sind n, p und $q = 1 - p$?

Eine Rechnung mit weitreichenden Konsequenzen für die gesamte Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (die X_i's seien iid mit existierender Varianz; ansonsten beliebig):

$$\begin{aligned} V[\overline{X}] &:= V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2} V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V\left[X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V\left[X_1\right] \\ &= \frac{1}{n^2} n V\left[X_1\right] \\ &=: \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \\ &= \frac{1}{n}\sigma^2; \end{aligned} \qquad \text{(wichtig)}$$

damit erhalten wir insbesondere

$$sd[\overline{X}] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma. \qquad \text{(noch wichtiger)}$$

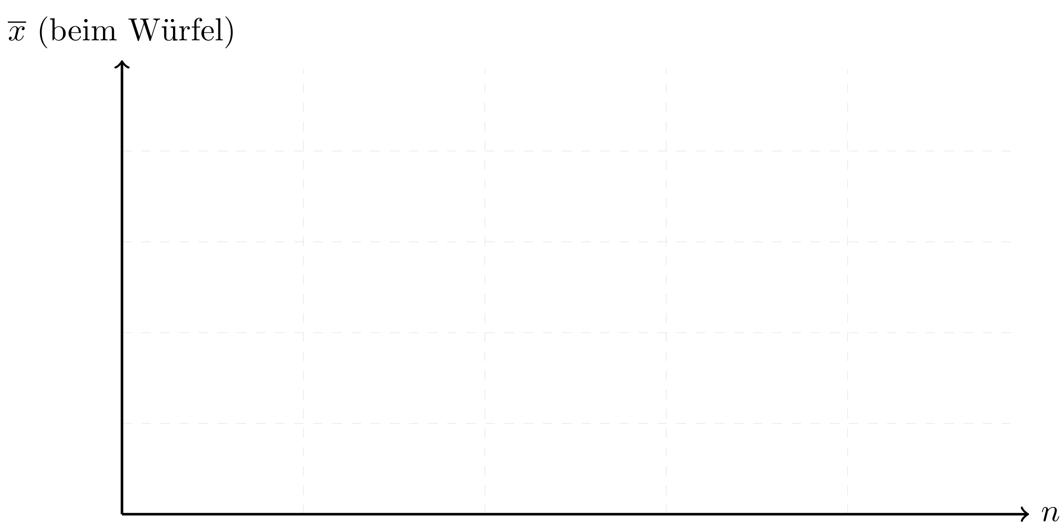
Eine von vielen Konsequenzen ist:

Dieses

$$\sqrt{n}$$

wird uns *nie* mehr loslassen, denn $\overline{X}$, bzw $\overline{x}$, ist zentrales Untersuchungsobjekt in der Statistik. Es kommt in der Berechnung von Konfidenzintervallen (Kapitel 8) und in fast allen Tests (Kapitel 9 und 10) vor!

Ein Bild zur Dynamik in dieser Rechnung, erkärt mit dem fairen Würfel mit Erwartungswert 3.5.



5.3 Z-Transformierte

"Z-Transform": Wenn X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung hat, dann hat

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \text{(Z – Transform)}$$

eine $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung (welche in Büchern und Libraries von Statistik-Paketen abgelegt ist). $\mathcal{N}(0,1)$ nennen wir "Standard-Normalverteilung". 5 Bemerkungen:

1. $\frac{X-\mu}{\sigma}$ hat Erwartungswert:

$E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] =$

und 2. Varianz

$V\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] =$

Diese beiden Eigenschaften gelten zudem immer, nicht nur bei der Normalverteilung. Kein Wunder: wenn man den Erwartungswert abzieht, ist er nachher gleich 0, wow!

3. Im Buch wird in 5.10.3 bewiesen, dass eine Normalverteilung eine Normalverteilung bleibt, wenn Sie den Mittelwert abziehen und durch die Standardabweichung teilen.

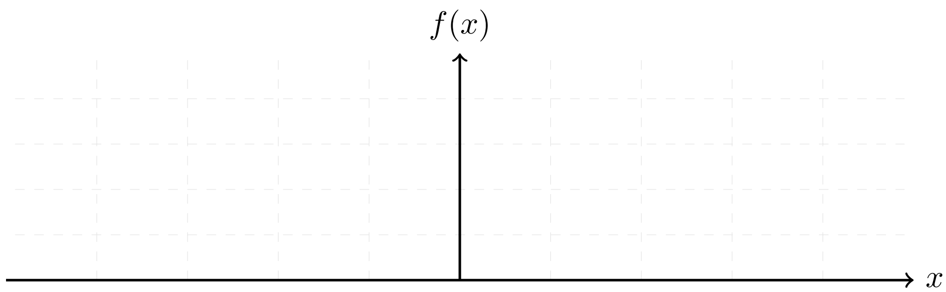
4. Im Allgemeinen (Poisson, Binomial, etc) kann man Verteilungen nicht einfach so transformieren, sodass man im gleichen Verteilungstyp bleibt.

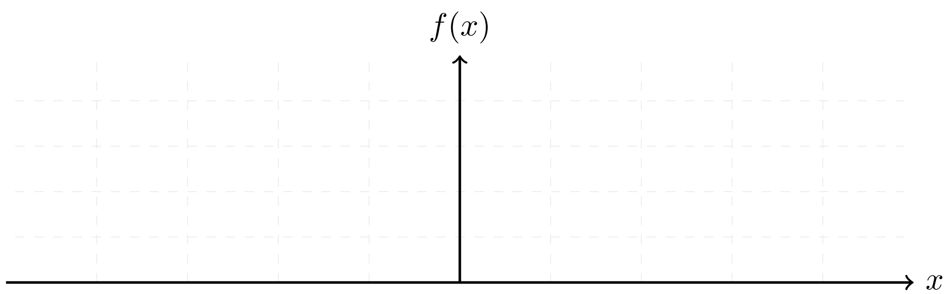
5. Z-Transform ist Aufgabe 1a in jeder (!) Prüfung! Der TR darf nur zur Kontrolle eingesetzt werden und wir wollen die Z-Transformation explizit sehen (siehe Archiv).

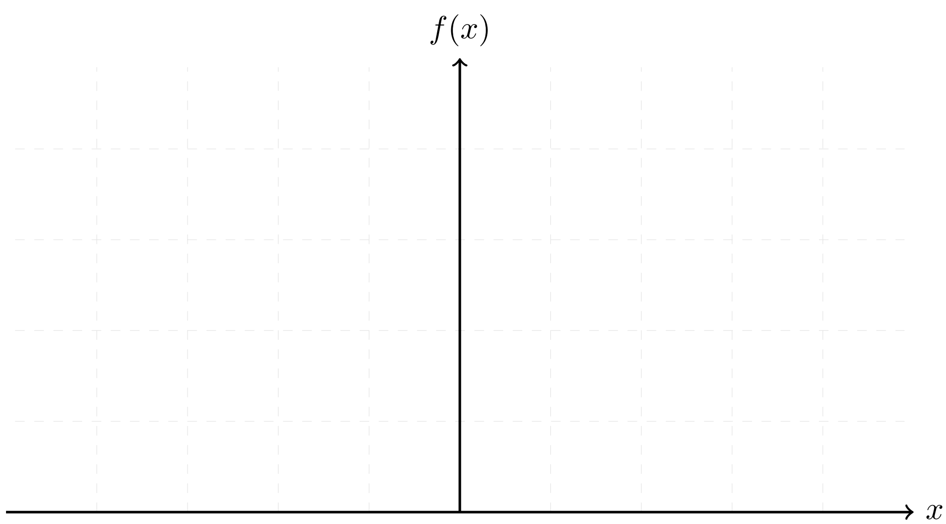
Die Z-Transform wird üblicherweise so eingesetzt, dass danach eine *Standard*-Normalverteilung resultiert. Man kann aber auch beliebig Konstanten addieren und mit Konstanten multiplizieren, die Zufallsgrösse bleibt zumindest normalverteilt.

Zentrieren ($-\mu$) und Normalisieren ($\frac{1}{\sigma}$) nennt man zusammen Standardisieren (dies kann man auch bei anderen Verteilungen machen).

Wir machen dazu noch 3 Bilder:

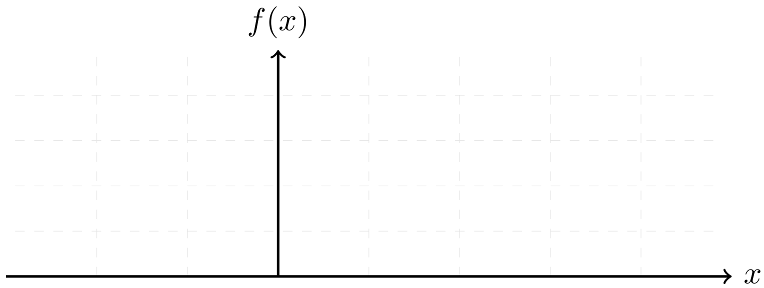


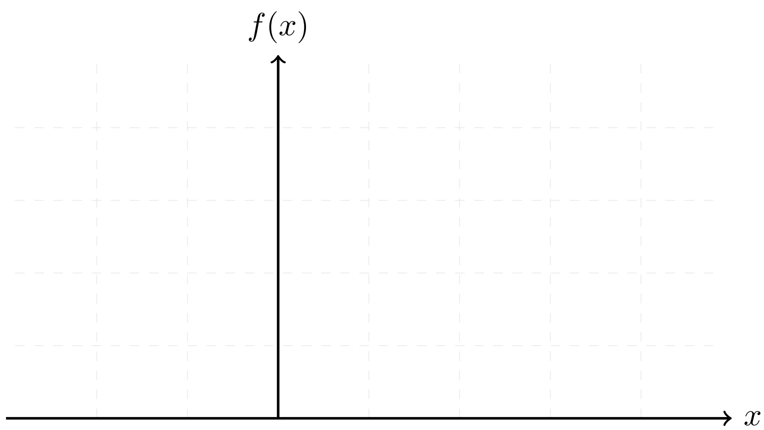




Sei X eine $\mathcal{N}(10, 4)$-Zufallsgrösse ($\sigma^2 = 4$ also $\sigma = 2$). Formen Sie $P[X > 13]$ soweit um, dass Sie den Wert in einer Tabelle ablesen können.

Es ist bei solchen Aufgaben sehr empfohlen, eine grosse, gute Skizze zu machen. Wenn man die Dichte der Normalverteilung gut zeichnen will, dann ist es gut zu wissen, dass bei $\mu \pm \sigma$ die Wendepunkte WP sind. Die Höhe der WP ist etwa 60 % der Höhe beim Modus (dnorm(1)/dnorm(0)=0.6065307). Etwa 2/3 der W'keit liegt innerhalb von $\mu \pm \sigma$ und etwa 95 % innerhalb von $\mu \pm 2\sigma$, siehe auch p+3.





Aufgabe 5−17: Berechnen Sie:

a) $P(X \geq 999)$ für $\mathcal{N}(1000\,;100)$.

b) $P(1.3 \leq X \leq 1.4)$ für $\mathcal{N}(1\,;0.16)$. Hausaufgabe

c) $P(|X| < 2)$ für $\mathcal{N}(0.5\,;16)$.

d) Eine normal verteilte Zufallsgrösse X hat Erwartungswert 50 und Varianz 4. Berechnen Sie $P(X > 52.5)$. Hausaufgabe

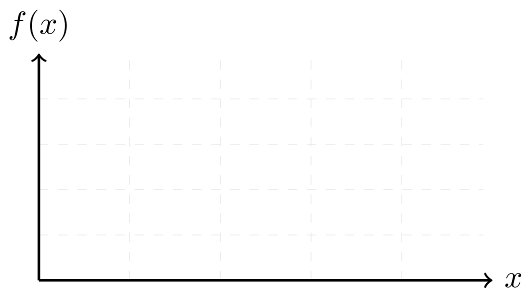
a) $P(X \geq 999) =$

c) $P(|X| < 2)$

Lehre aus Beispiel c), Vorsicht: bei Absolutbeträgen und Quadraten ($P[|X| > 2]$, $P[X^2 > 2]$): immer zuerst Absolutbeträge oder Quadrate loswerden *und erst dann* (!) die Z-Transform anwenden.

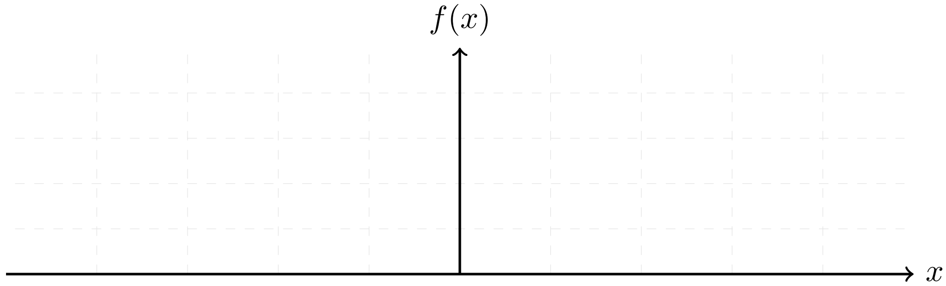
Aufgabe 5−20: Das Körpergewicht einer gewissen Sorte von Menschen sei normal verteilt mit $\mu = 80$ kg, $\sigma = 10$ kg. Die schwersten 10% müssen ein Sondertraining absolvieren. Bei welchem Gewicht ist die Grenze festzusetzen?

Von der Didaktik ist das die Umkehrung der bisherigen Fragestellung. Immer nützlich, um ein Gebiet besser zu verstehen.

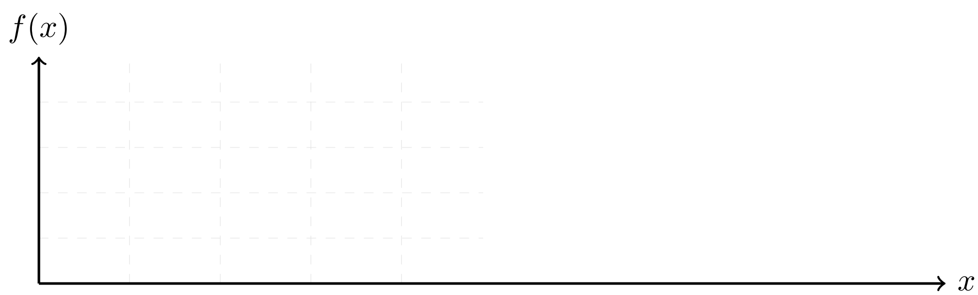


Kann das Resultat grössenordnungsmässig sein? Machen Sie dazu den Architekturtest: 22 Meter hohe Türe? Ja, oke; ist ja nur ein Kommafehler - und 0.5 Punkt Abzug bei Prüfung.

$\mathcal{N}(0,1)$: Approximative Formeln aus der Praxis: sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse. Dann gelten $P[|X| > 1] \doteq 1/3$ und $P[|X| > 2] \doteq 5\%$, Bild dazu, auswendig:



$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: Allgemein gilt wegen der Z-Transform (rechnen Sie es selber nach!): Eine Normalverteilung hat etwa 2/3 ihrer Wahrscheinlichkeit innerhalb 1 Standardabweichung vom Mittelwert entfernt (genauer, siehe Tabelle: %) und sogar 95 % ihrer Wahrscheinlichkeit innerhalb von 2 Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt:



Theorie: $\mu \pm 2\sigma$: 95% der Daten   Praxis: $\bar{x} \pm 2\hat{\sigma}$: 95% der Daten

Der Unterschied zwischen Theorie und Praxis ist in der Theorie kleiner als in der Praxis...

Alles obige gilt streng genommen nur bei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; aber wegen CLT (Kapitel 7) auch viel allgemeiner! Das ist eine sehr gute Nachricht für die praktische Arbeit.

5.4 Stichproben und Schlussbemerkungen; in Ruhe lesen als Hausaufgabe

Dies ist ein kleiner Vorgriff auf den Statistik-Teil. Es ist das Bindeglied zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik:

* Bis jetzt haben wir immer Wahrscheinlichkeits*theorie* gemacht (Ausnahme: Kapitel 2: Beschreibende Statistik).
* Die Wahrscheinlichkeitstheorie zeichnet sich dadurch aus, dass wir immer sicher wissen, wie das Modell ist (z.B. "Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse.") Wir müssen uns in der Wahrscheinlichkeits*theorie nie* Gedanken machen, ob dieses Modell überhaupt "stimmt".
* In der Statistik gilt folgendes: **Wir haben nur die Daten** $d = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$**!!!** und wissen nicht, aus welcher Verteilung die eigentlich stammen. Diese Daten können Würfelaugen sein bei n Würfen, Blutdruckmessungen bei verschiedenen Personen oder bei der gleichen Person zu verschiedenen Zeitpunkten, Aktienkurse etc.
* In der Statistik mit realen Daten aus der Welt sprechen wir von *Daten oder Stichproben*; bei Statistikpaketen oder wenn wir die Theorie anhand eines Beispiels veranschaulichen wollen, sprechen wir von *Realisationen*: "Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Realisation vom Umfang n aus einer $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse".
* Daten werden immer mit kleinen Buchstaben angegeben. Meist werden wir die dazugehörende Zufallsgrösse (aus der die Realisation stammt oder wir gehen zumindest mal davon aus) mit den dazugehörenden Grossbuchstaben bezeichnen: X_i und x_i.
* Wenn nicht anders vereinbart, werden Stichproben und Realisationen vom Umfang n so behandelt, dass man jedem Datenpunkt die Wahrscheinlichkeit $1/n$ zuweist und davon ausgeht, dass die n Daten unabhängig voneinander generiert wurden. Nochmals: Dies wird (mit gutem Grund) vereinbart und ist keineswegs zwingend! Wir haben dann also, mathematisch sauber ausformuliert:

$$(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wenn X_i z.B. die Anzahl Augen beim i-ten Wurf ist und die Welt im Zustand ω ist und die X_i's voneinander unabhängig sind.

Wann macht es Sinn, von der **Unabhängigkeit** abzuweichen oder das **Gewicht nicht gleichmässig** ($1/n$) zu verteilen?

Abweichen von der **Unabhängigkeit** (dazu gibt es dann später spezielle, weiterführende Vorlesungen):

* Zeitreihen (Klima, Aktienkurse, Hochwasser)

* räumliche Statistik (GG, Ökologie)

Ausnahmen, wo vom **Gewicht** $1/n$ abgewichen werden *kann* (nicht unbedingt "abgewichen werden muss"): wenn man neue Daten als wertvoller gewichtet als alte Daten (zum Beispiel weil das Regime geändert hat)

xxx

Warnung; beliebter Blödsinn von Prüfungen:

P[X] , sollte sein:

E[A] , sollte sein:

E[X=5] , sollte sein:

Theorie (Welt I, modelliert im Büro Luchs) versus Daten (Welt II, nach Luchs, gemessene Daten der realen Welt) und ein praktisches Zwischending (Welt III: Simulationen):

```
> a<-rnorm(100,3,2) [3 ist der "wahre" Erwartungswert]

> a

[1] 3.2865889 2.7417728 1.5876791 5.9982951 5.6082647 0.4969525 ....

> mean(a)

[1] 3.532051 ["hätte 3 geben müssen"]
```

Quintessenz: Wir wissen in Welt III, dass $\mathcal{N}(3,4)$ stimmt (wahr ist), im Vergleich zu Welt II, wo wir den wahren Wert nicht kennen (unbekannt, fehlende Daten, zu komplex zum berechnen). **Simulationen sind ein Trockenschwimmbecken.**

Artikel vom Dozenten (erwartete Anzahl Rekorde): https://schweizermonat.ch/rekorde

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

diskret: $E[X] := \sum_{x_i} x_i P[X = x_i]$ & stetig $E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$; Schwerpunkt!

Bsp E: Po(λ) : λ (“wieviele Ereignisse pro Zeiteinheit”) und reziprok dazu $\exp(\lambda)$: λ^{-1} (“wann nächstes Ereignis”). “10 pro Sekunde $\Rightarrow$ 0.1 Sekunde bis nächstes Mal”

Sei $X \sim \exp(\lambda)$. Wir kombinieren ein paar Resultate: von MAT182: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, also $\frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{1}{\lambda}$; dazu $\ln(2) \doteq 0.7$ und $\frac{1}{0.7} \doteq 1.4$. Damit haben wir

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \doteq 1.4 \cdot T_{1/2} \ :$$

bei $\exp(\lambda)$: Erwartungswert ist etwa 1.4mal grösser als Halbwertszeit. Median $\hat{=}$ Halbwertszeit $T_{1/2}$ (mathematisch gleich, andere Sichtweise).

diskret: $V[X] := \sum_{x_i} (x_i - \mu_X)^2 P[X = x_i]$ & stetig $V[X] := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)dx$

$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$, $V[aX + b] = a^2 V[X]$, $sd[aX] = |a| sd[X]$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, wobei

$$E[X^2] = \begin{cases} \sum_{x_i} x_i^2 P[X = x_i] & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx & \text{falls } X \text{ stetig.} \end{cases}$$

Varianz der Summe ist Summe der Varianzen wenn unabhängig:

$$V[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]$$

Das arithmetische Mittel $\overline{X}$: $E[\overline{X}] = \mu$ und $V[\overline{X}] = \frac{1}{n}\sigma^2$; und damit $sd[\overline{X}] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma$.

Z-Transform: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann $Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, Standard-Normalverteilung. Vorsicht: bei Absolutbeträgen und Quadraten ($P[|X| > 2]$, $P[X^2 > 2]$): immer zuerst Absolutbeträge oder Quadrate loswerden *und erst dann* (!) die Z-Transform anwenden. Z-Transformation immer in 2 Schritten, ist sicherer ($-\mu$, $\frac{1}{\sigma}$); im Buch hat es die Variante in einem Schritt.

Architekturtest: 22 Meter hohe Türe? Kann das Resultat grössenordnungsmässig sein?

Empirie, Daten, Stichprobe, Realisation vom Umfang n: jedem Datenpunkt wird Wahrscheinlichkeit $1/n$ zugewiesen und Annahme der Unabhängigkeit (ausser explizit anders erwähnt).