Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

3. Wahrscheinlichkeit P (Probability)

Literatur Kapitel 3

* Storrer: Kapitel 32-36
* Stahel: Kapitel 4
* Statistik in Cartoons: Kapitel 3

Der grosse Block von Kapitel 3-7 ist einerseits wichtiges Fundament für die nachfolgende Statistik ab Kapitel 8. Andererseits wird in Kapitel 3-7 eine Sprache gelernt (die Sprache der Stochastik), mit der in vielen Gebieten der Naturwissenschaften zufällige Mechanismen modelliert werden, unabhängig von einer nachfolgenden statistischen Auswertung von Daten. Das ist quasi das stochastische Gegenstück zu den deterministischen Differentialgleichungen von MAT 182. Unter anderem ist die ganze "Computational Biology" voll von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Verteilungen.

3.1 Grundbegriffe

1969: NASA will die Saturn 5 mit der Apollo 11 und 3 Astronauten für 100'000'000 US $ versichern (Totalverlust). Wieviel Prämie soll man da verlangen?

Wissenschaftler: "Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Freilandversuch mit genmanipulierten Organismen eine Katastrophe passiert, ist 5 %."

Besprechen jetzt 4 anschauliche, intuitive Wahrscheinlichkeitsbegriffe als Motivation für den abstrakten (axiomatischen) Wahrscheinlichkeitsbegriff (siehe 3.3).

3.1.1 Klassische Wahrscheinlichkeit

Storrer p 41; Idee ist:

$$P = \frac{G}{M},$$

wobei P = Wahrscheinlichkeit, G = Anzahl **g**ünstige Fälle und M = Anzahl **m**ögliche Fälle. Vorsicht: alle Möglichkeiten haben die gleiche W'keit.

Wir lösen gemeinsam Aufgabe 32-5.

3.1.2 Idealisierte relative Häufigkeit

Aussage: "W'keit, dass das nächste in der Stadt Zürich geborene Kind ein Knabe ist, beträgt 51.3 %." Wie kommt man zu dieser Aussage?

Was ist der medizinische Grund, dass wir nicht näher bei 50 % sind?

Praxis: Was, wenn wir statt 51.3 % Zahlen wie 62.5 %, 42.86 % oder 16.67 % haben?

Wir lösen gemeinsam Aufgabe 32-2.

3.1.3 Geometrische Wahrscheinlichkeit

Idee: Wahrscheinlichkeit proportional zum Flächeninhalt der einzelnen Stücke (ähnlich 3.1.1 (endlich)). Gehen zu Bsp 32.3.F in Storrer:

Wir lösen gemeinsam Aufgabe 32-9.

3.1.4 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Nicht weiter von Belang für diese Vlsg; 2 Beispiele:

* NASA-Bsp:
* Freilandversuch GenTech:

Lesen Sie jetzt (nach der Vorlesung) Kapitel 32 von Storrer durch.

3.2 Ergebnisse und Ereignisse

Wir werden in 3.2 und 3.3 die naive Vorstellung von Wahrscheinlichkeit und Zufall formalisieren, in die Sprache der Mathematik übersetzen. Als erstes müssen wir, ohne die Wahrscheinlichkeiten anzuschauen, Versuchsausgänge formalisieren. Es ist ein Glücksfall, dass die Mengenlehre uns hier grosse Dienste leistet:

* Sei Ω eine nichtleere Menge (nonempty set).

* Sie steht für die Menge der Versuchsausgänge; wir nennen sie auch Ereignisraum oder Ergebnisraum (sample space). Es findet jeweils in einem Experiment genau ein sogenanntes Elementarereignis statt, z.B. $\omega_1 \in \Omega$ oder $\omega_2 \in \Omega$ etc.

* Bei einem Würfel wird man sinnvollerweise mit

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

die Menge der möglichen Anzahl Augen wählen. Sie können es aber auch mit $\Omega := \{a, b, c, d, e, f\}$ machen - aber wir wollen uns das Leben so einfach wie möglich machen.

* Bei Münzwurf wird man sinnvollerweise $\Omega := \{K, Z\}$ wählen. $n-$facher Münzwurf: $\Omega := \{K, Z\}^n$.

* Die Menge Ω kann von endlicher oder unendlicher Kardinalität (Anzahl Elemente) sein; sogar überabzählbar unendlich (vgl Kapitel 2).

  * endlich: obiges Beispiel mit den Würfelaugen
  * abzählbar unendliches Ω: zufällige Zahl aus $\Omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$; zB Storrer 33.3.B (Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit):

  * überabzählbar unendliches Ω: Zeit bis Atom zerfällt ist im Intervall $\Omega := (0, \infty)$ und zufällig, zumindest in gebräuchlichen physikalischen Modellen:

* Beim Würfel können wir fortfahren mit: A ist mit $A := \{2, 4, 6\}$ die Menge der geraden Zahlen und $B := \{4, 5, 6\}$ die Menge der Zahlen streng grösser 3.

* A bzw. B nennen wir ein Ereignis (event). Ereignisse sind allgemein Teilmengen von Ω. Dies ist verwirrend. Es kann ja (Ereignis A) nicht gleichzeitig $2, 4$ und 6 geworfen werden. Es gilt nach wie vor, dass genau ein sogenanntes Elementarereignis stattfindet. Wenn dieses ω_1 z.B. gleich 2 ist, so sagen wir: A ist eingetreten - es ist ja auch eine gerade Zahl geworfen worden; eine reicht!

* Wir schauen nochmals bei Xaver und Yvonne vorbei und formalisieren deren Situation:

Wir lösen zusammen Aufgabe 33-5:

$\{\omega\}$ vs ω

$\{3\} \cap \{4\}$ vs $3 \cap 4$.

Wir fassen die mengentheoretischen Ausdrücke und ihre Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie (WT) in folgender Tabelle zusammen (dazu Venn-Diagramme; exzellentes Beispiel sind die EinwohnerInnen in ihren Kantonen; Experiment ist: wir greifen eine Person zufällig heraus).

Kleine Warnung: Bei einer Familie mit genau 3 Kindern ist das Gegenteil der Aussage: "die haben 3 Mädchen" umgangssprachlich "die haben 3 Knaben". Ab jetzt und mathematisch korrekt wird das Gegenteil von 3 Mädchen bedeuten, dass es mindestens 1 Knabe hat. Es geht in der Mathematik um das Komplement, die Ergänzung. Nachfolgend ist das wichtig bei A und A^c.

Symbol	**Mengentheorie / Bedeutung WT**
Ω	Menge / Ereignisraum, Menge der möglichen Versuchsausgänge
ω	Element von Ω / Elementarereignis, konkreter Versuchsausgang
A	Teilmenge von Ω (subset) / Ereignis; falls $\omega \in A$, sagt man, dass das Ereignis A eingetreten ist
$\overline{A}(= A^c)$	Komplement von A / kein Elementarereignis aus A findet statt
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B (intersection) / ein Elementarereignis aus A und B findet statt
$A \cup B$	Vereinigung von A und B (union) / ein Elementarereignis aus A oder B findet statt
$A \backslash B$	A ohne B (A but not B) / ein Elementarereignis aus A tritt ein, aber nicht aus B
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B (subset) / Wenn ein Elementarereignis aus A stattfindet, dann immer auch ein Elementarereignis aus B
ϕ	leere Menge (empty set) / unmögliches Ereignis
Ω	ganze Menge (entire set) / sicheres Ereignis (etwas muss passieren)

Zum Schluss noch die Situation

$$A \cap B = \phi :$$

Wir sagen in der Mengenlehre: "A und B sind elementfremd (disjunkt)". In der Ereignissprache sagen wir, die Ereignisse seien unvereinbar.

Lesen Sie jetzt (nach der Vorlesung) Kapitel 33 von Storrer durch.

3.3 Rechenregeln und Axiome

Für einen vierzigjährigen Mann betrage die Wahrscheinlichkeit 0.002, innert Jahresfrist zu sterben. An einer Klassenzusammenkunft sind 20 vierzigjährige Männer zusammen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer im Laufe des darauffolgenden Jahres stirbt.

Wie geht man da vor? Benutzen Sie auch die Begriffe aus Teil 3.2.

Wir kommen in 3.6 darauf zurück.

Bemerkung zum Funktionsbegriff:

Die axiomatische Definition 3.1. beinhaltet alle bisherigen 4 Begriffe von Wahrscheinlichkeit:

Definition 3.1 [Wahrscheinlichkeit P (Probability) nach Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov] *Es sei Ω ein Ergebnisraum. Jedem Ereignis E aus Ω sei eine Zahl $P[E]$ zugeordnet, so dass gilt:*

a) $0 \leq P[E] \leq 1$ *für alle E.*

b) $P[\Omega] = 1$.

c) Für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise unvereinbare Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ gilt:

$$P[E_1 \cup E_2 \cup \ldots] = P[E_1] + P[E_2] + \ldots.$$

Aus Definition 3.1 c) folgt sofort Regel 4 in Storrer für unvereinbare E und F:

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F].$$

Es gibt eine extrem praktische Interpretation von **Wahrscheinlichkeiten und Proportionen/Anteilen**: Wir haben 8.6 Millionen EinwohnerInnen in der Schweiz. Wenn man jetzt zufällig (jedeR EinwohnerIn hat gleiche Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, also (1/8'600'000)) eineN EinwohnerIn herausgreift, so ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, einen Zürcher herauszugreifen, genau gleich der Proportion/dem Anteil der Zürcher an der Bevölkerung. Wir werden diese Analogie in vielen Fällen einsetzen.

Schauen wir mal, ob Definition 3.1 wirklich Sinn macht: Ω sei die Menge aller EinwohnerInnen der Schweiz. Was bedeutet jetzt Eigenschaft b)?

Seien die E_i, $1 \leq i \leq 26$, die Mengen der EinwohnerInnen der jeweiligen Kantone der Schweiz. Was bedeuten Eigenschaft a) oder c) anhand von ein paar Beispielen?

Aus Definition 3.1 lassen sich nützliche Regeln ableiten, welche wir jetzt entwickeln.

[Regel 5 und 6 im Storrer; Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit]: $P[A] = 1 - P[\overline{A}]$; v.a. $P[\phi] = 0$. (Beweis Storrer p 66)

$A \subseteq B \Rightarrow P[B] = P[A] + P[B \backslash A]$

$A \subseteq B \Rightarrow P[A] \leq P[B]$ (Aufgabe 34-3)

[Regel 7 im Storrer] $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$. (Beweis Storrer p 66)

Wir lösen zusammen Aufgaben 34-1 und 34-2.

Lesen Sie jetzt (nach der Vorlesung) Kapitel 34 von Storrer durch.

3.4 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

3.3 war abstrakt, mathematisch und theoretisch. Im Gegensatz dazu ist dieses Kapitel beinahe ein Übungskapitel und dient der Festigung des bisherigen Wissens.

3.4.1 Beispiele endlicher Wahrscheinlichkeitsräume

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $\Leftrightarrow |\Omega| < \infty$.

Konsequenz: In einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse. Formal: Sei $E := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P[E] &= P[\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}] = P[\{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}] \\ &= P[\{\omega_1\}] + \ldots + P[\{\omega_n\}] = \sum_{i=1}^{n} P[\{\omega_i\}] \end{aligned} \qquad \text{(Storrer – Regel 8)}$$

Man könnte denken, das gilt doch sowieso immer? Im Storrer ist jedoch bereits mehrfach darauf hingewiesen worden, dass...

Wir wollen ein paar einfache Beispiele machen, neben Münze und Würfel.

Bsp 1) Bei Wahlen um einen vakant gewordenen Sitz kann man als WahlkampfmanagerIn subjektive Wahrscheinlichkeiten den 3 möglichen Ereignissen eines Wahlganges zuweisen:

* ω_1 : Freddy Farblos gewinnt
* ω_2 : Willy Wetterfahne gewinnt
* ω_3 : unentschieden

Dies sieht dann in Ihrem Kopf vielleicht so aus:

$P[\{\omega_1\}] = 0.6$,
$P[\{\omega_2\}] = 0.399$ und
$P[\{\omega_3\}] = 0.001$.

Sie haben, selbst bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten, folgende 2 Dinge bei der Wahl der Wahrscheinlichkeiten automatisch beachtet:

*

*

Wir können dies auch aus den Axiomen in Definition 3.1 selber herleiten: sei dazu $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Wegen Definition 3.1 b) und c) haben wir

$$1 = P[\Omega] = P[\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}] = P[\{\omega_1\}] + \ldots + P[\{\omega_n\}].$$

Offenbar müssen in endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse auf 1 summieren. Wegen Definition 3.1 a) müssen sie zudem ≥ 0 sein. Man kann zeigen, dass Sie in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum der Kardinalität n einfach n nichtnegative (d.h. ≥ 0) Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ nehmen können, welche auf 1 summieren und sagen: **"Das sind meine Wahrscheinlichkeiten!"**. Ihre Wahl wird immer Definition 3.1 genügen (auch Definition 3.1 c)) und damit gelten auch alle Regeln, welche wir in 3.3 entwickelt haben, auch für Ihre spezielle Wahl.

Bsp 2) Wir üben dies gleich nochmals, indem wir zum ersten Mal Bekanntschaft mit Willy Würfel machen (Aufgabe 35-1):

3.4.2 Laplace-Räume

Wir bleiben bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen, fordern aber *zusätzlich*, dass alle $\{\omega_i\}$, $1 \leq i \leq n$, gleich wahrscheinlich sind; also zwingend:

$$P[\{\omega_i\}] = \frac{1}{n}.$$

Solch einen Wahrscheinlichkeitsraum nennt man auch **Laplace-Raum**. Wir sind solchen Räumen bereits oft begegnet:

* fairer Münzwurf ($n = 2$)
* fairer Würfel ($n = 6$)
* greife EinwohnerIn der Schweiz aus Korb

Wenn jetzt $|E| = k$, so gilt wegen Storrer-Regel 8, dass

$$P[E] = \frac{k}{n} = \frac{|E|}{|\Omega|}. \qquad \text{(Storrer – Regel 9)}$$

Das kennen wir aber schon! Wir haben bei der sogenannten "Klassischen Wahrscheinlichkeit" diese Regel bereits angewandt. Jetzt können wir präzisieren, dass diese Regel nur in Laplace-Versuchen angewandt werden darf (haben wir bis jetzt auch so gemacht).

Bsp 3) Beim Lotto werden 6 Zahlen aus 45 Zahlen gezogen. Auf die Reihenfolge kommt es nicht an. Kleine Fangfrage ans Publikum: Es gibt Esoteriker, welche beim Lotto ihre Wahl vom letzten Ausgang des Spiels oder vom Ausgang des gleichen Spiels in Deutschland abhängig machen. Finden Sie das sinnvoll?

https://schweizermonat.ch/und-hier-noch-die-lottozahlen/

Beispiel 35.4.A

Anzahl Richtige k	Möglichkeiten hierzu	Wahrscheinlichkeiten hierzu (gerundet)
6	1	0.0000001228
5	234	0.0000287291
4	$11'115$	0.0014
3	$182'780$	0.0224
2	$1'233'765$	0.1515
1	$3'454'542$	0.4241
0	$3'262'623$	0.4001
total	$8'145'060$	1

Beispiel 35.4.C

3.4.3 Abzählbar unendliche Wahrscheinlichkeitsräume

"Abzählbar unendlich" beinhaltet 2 Punkte: Es gilt zwar $|\Omega| = \infty$, aber immerhin können wir die Elementarereignisse vollständig durchnummerieren und also schreiben:

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}.$$

Wieder folgt wegen Definition 3.1 b) und c):

$$1 = P[\Omega] = P[\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P[\{\omega_i\}].$$

Diese Formel gilt also auch im *abzählbar* unendlichen Fall! Storrer-Regel 8 können wir dementsprechend verallgemeinern zu: In einem abzählbar unendlichen Wahrscheinlichkeitsraum ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse. Formal: Sei $E := \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Dann gilt:

$$P[E] = P[\{\omega_1\}] + P[\{\omega_2\}] + \ldots = \sum_{i} P[\{\omega_i\}] \qquad \text{(Storrer} - \text{Regel 10)}$$

Wir lassen mit der Schreibweise "$\sum_i$" bzw. den "$\ldots$" offen, ob $|E|$ selber endlich oder unendlich ist.

Wir lösen dazu Beispiel 35.5.A im Storrer.

Lesen Sie jetzt (nach der Vorlesung) Kapitel 35 von Storrer durch.

3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

https://schweizermonat.ch/wer-hoert-da-mozart-im-niederdorf/

3.5.1 Grundlagen

* *bedingen* auf ein Ereignis

* haben am Schluss wieder eine *Wahrscheinlichkeit*

Beispiel: Korb der EinwohnerInnen der Schweiz. Es gibt

R = Menge der RaucherInnen

$\overline{R}$ = Menge der Nicht-RaucherInnen

H = Menge der Personen, welche innert der kommenden 10 y einen Herzinfarkt kriegen

$\overline{H}$ = Menge der Personen, welche innert der kommenden 10 y keinen Herzinfarkt kriegen

Wir haben damit 4 Mengen von Personen:

Als Arzt/Ärztin stellen Sie die Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Patient in den kommenden 10 Jahren einen Herzinfarkt kriegt.

In der Praxis wird man noch weitere Informationen (ausser R/NR) einbeziehen: Geschlecht (G), Sport (S), Blutfette (B), Blutdruck (D), H in Familie vor 50. Altersjahr (F) und vieles weitere mehr. Wir haben dann also einen Ausdruck der Art:

$$\frac{P[H \cap R \cap G \cap \overline{S} \cap B \cap D \cap \overline{F}]}{P[R \cap G \cap \overline{S} \cap B \cap D \cap \overline{F}]}.$$

Auch wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten komplizierter als die (unbedingten) Wahrscheinlichkeiten sind, stellen Sie einen Gewinn dar: Im Beispiel der Frage nach dem Herzinfarkt:

je mehr Informationen

Arzt/Ärztin hat,

desto genauer

kann man Risiko der Person angeben. Statt einer unbedingten Wahrscheinlichkeit $P[H] = 0.05$ kann man dann sagen, dass die Wahrscheinlichkeit 25 % ist und Handlungsbedarf besteht!

Weiteres Beispiel: fairer Würfel. Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen (Ereignis A), gegeben haben eine Zahl kleiner als 4 (Ereignis B). Antwort:

Wie sind wir darauf gekommen? Klar war, dass wir uns nur um die Zahlen $\{1, 2, 3\}$ kümmern müssen (gegeben kleiner 4). Das ist unser neuer Ereignisraum. Jedes Elementarereignis hat jetzt Wahrscheinlichkeit 1/3 (früher 1/6). Die Antwort ist demnach 1/3, weil 2 die einzige gerade Zahl kleiner 4 (und grösser 0) ist. Was haben wir aber wirklich gemacht?

$$\frac{1}{3} = 2 * \frac{1}{6} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

Wir müssen durch "$P[B]$" teilen, weil wir wieder eine Wahrscheinlichkeit haben wollen (muss auf 1 summieren). Deshalb definieren wir:

Definition 3.2 [Bedingte Wahrscheinlichkeit $P[A|B]$ (conditional probability)]

$$P[A|B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]},$$

falls $P[B] > 0$. Man nennt $P[A|B]$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B. Betrachten Sie dazu B als fest gewählt.

Man kann zeigen: $P[.|B]$ ist selber auch eine Wahrscheinlichkeit im Sinne von Definition 3.1.

Sei $B \subset A$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $P[A|B] = 1$. Warum muss dies so sein (anschaulich)?

Wir lösen in der Vlsg Storrer Bsp 36.4.A

3.5.2 Produktformel und mehrstufige Experimente

Es gilt:

$$P[A|B]P[B] = P[A \cap B] = P[B|A]P[A]. \qquad \text{(Produktformel)}$$

Beweisen Sie in der Klasse (jedeR) für sich diese Regeln:

Anwendung auf mehrstufige Experimente: Rauchen und Krebs (oder Herzinfarkt):

R = Person ist Raucher/in

K = Person erkrankt an Lungenkrebs (oder hat Herzinfarkt)

Analyse mit Baumdiagramm und Produktformel:

"Multiplikation entlang den Ästen"

"Summation quer rüber"

Erweiterbar auf mehr als 2 Stufen, siehe Storrer (36.5) und (36.6).

3.5.3 Formel von Bayes ("The false positive")

A = Patient hat bestimmte Krankheit (HIV, Grippe, etc.)

B = Test hierfür ist positiv; d.h. Krankheit wird angezeigt

$P[A] = 0.001$ [1 aus 1000 hat Krankheit]

$P[B|A] = 0.99$ [W'keit für positiven Test wenn Patient wirklich krank 99 %, "Sensitivität"]

$P[B|\overline{A}] = 0.02$ [W'keit für positiven Test obschon Patient gesund 2 %, die Gegenw'keit nennt man dann "Spezifität]

$P[A|B] =?$ [W'keit Patient hat Krankheit gegeben der Test ist positiv]

Mit Tabelle:

Formal: Angenommen wir kennen $P[B|A]$, wollen aber $P[A|B]$. Es gilt nach Definition

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

Des weiteren gelten folgende Mengengesetze: $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, wobei die Mengen $(B \cap A)$ und $(B \cap \overline{A})$ elementfremd sind. Also gilt $P[B] = P[B \cap A] + P[B \cap \overline{A}]$ und weiter

$$P[B \cap A] = P[A \cap B] = P[B|A]P[A];$$

analog erhalten wir

$$P[B \cap \overline{A}] = P[B|\overline{A}]P[\overline{A}].$$

Zusammen ergibt sich die *Formel von Bayes*:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B|A]P[A] + P[B|\overline{A}]P[\overline{A}]}.$$

www.republik.ch/2020/10/31/9-mal-macht-es-klick-und-1-mal-wird-trump-praesident

(Prognosen, Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und die menschliche Psychologie)

Wollen Anteil Millionäre in der Schweiz, haben nur kantonale Daten; wie gehen wir vor?

3.5.4 Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit FTW (total probability)

In der letzten Formel haben wir im 2. Gleichheitszeichen im Nenner bereits einen Spezialfall der FTW angewendet. Allgemein formulieren wir die FTW in folgendem

Satz 3.3 [Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit FTW] $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *seien Teilmengen von* Ω *so, dass die* B_i*'s elementfremd sind und* $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$*. Weiter sei für alle* B_i*,* $P[B_i] > 0$ *erfüllt. Dann gilt für jedes Ereignis* A*:*

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]. \tag{FTW}$$

Gutes Beispiel dazu: Proportion von EinwohnerInnen der Schweiz mit Vermögen über 1 Million CHF und wir haben leider nur die kantonalen Daten. Lsg: A ist Ereignis, eine Person auszuwählen mit Vermögen über 1 Million. $P[A|B_i]$ Wahrscheinlichkeit hierfür, gegeben suche nur unter Einwohnern im Kanton i, $P[B_i]$ Anteil Bewohner in Kanton i an gesamter Bevölkerung der Schweiz.

Beispiel mit Rauchen und Lungenkrebs: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person an Lungenkrebs erkrankt?

Besprechen KKW-Folie mit Wahrscheinlichkeitsbaum / Ereignisbaum

Lesen Sie jetzt (nach der Vorlesung) Kapitel 36 (ohne (36.7)) von Storrer durch.

Wir leiten über zu 3.6; untersuchen Sie $P[A|B]$, falls $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.

3.6 Unabhängigkeit von Ereignissen (independence of events)

Anschaulich und in der Modellierung bedeutet unabhängig, dass zwei Ereignisse von unabhängigen Mechanismen erzeugt wurden. Nennen Sie ein paar Experimente, welche Sie sinnvollerweise als (nicht) unabhängig bezeichnen würden:

Philosophische (auch physikalische) Frage, ob 2 reale Experimente wirklich unabhängig sein können für uns nicht (wirklich) relevant!

Definition 3.4 [Unabhängigkeit von Ereignissen] *Ereignisse A und B sind (paarweise) unabhängig voneinander, wenn*

$$P[A \cap B] = P[A]P[B].$$

Falls $P[B] > 0$ resp. $P[A] > 0$, so ist Unabhängigkeit von A und B gleichbedeutend mit

$$P[A|B] = P[A] \qquad \text{("who cares" – Variante)}$$

resp. $P[B|A] = P[B]$.

Die "who cares"-Variante entspricht mE eher unserer umgangssprachlichen Vorstellung von Unabhängigkeit. Wir betrachten nochmals die Ereignisse eine Seite weiter vorne.

Hängepartie aus 3.3: zwanzig 40-jährige Männer und ihre Klassenzusammenkunft:

Bsp 36.8.B in Storrer

KKW nochmals; Unabhängigkeit: in probabilistischen Sicherheitsstudien bei technischen Systemen geht man, mangels besserem Wissen, bei Wahrscheinlichkeitsbäumen oft von Unabhängigkeit aus. In unserem Krebsbeispiel wäre das $P[K|R] = P[K]$ (wohl falsch). Technische Lösungsansätze sind unter anderem: a) redundante Systeme von *verschiedenen* Herstellern einsetzen, welche b) optimalerweise nach verschiedenen physikalischen Prinzipien funktionieren. Damit verbunden ist die Hoffnung, dass es dann eher Unabhängigkeit hat und nicht das Versagen eines Systems mit dem Versagen des nächsten Systems kombiniert auftreten.

Kleine Warnung:

Bei mehr als 2 involvierten Ereignissen ist Vorsicht am Platz. Verweise auf Storrer (36.9).

Falls Zeit, lösen wir in der Stunde Aufgaben aus Kapitel 36; A 36-8.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer II selber durch (Kapitel 32-36).
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.