C. INTEGRALRECHNUNG

9. EINLEITENDE BEISPIELE ZUM BEGRIFF DES INTEGRALS

* Bewegung Massenpunkt: in der Vlsg

* Arbeit (Physik): zu Hause

* Fläche unter der Kurve: in der Vlsg

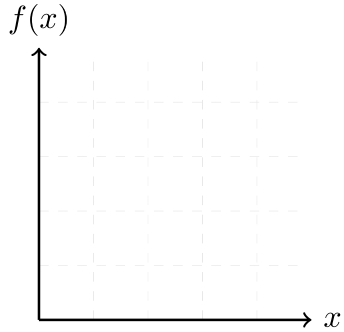
* Volumen Rotationskörper: zu Hause

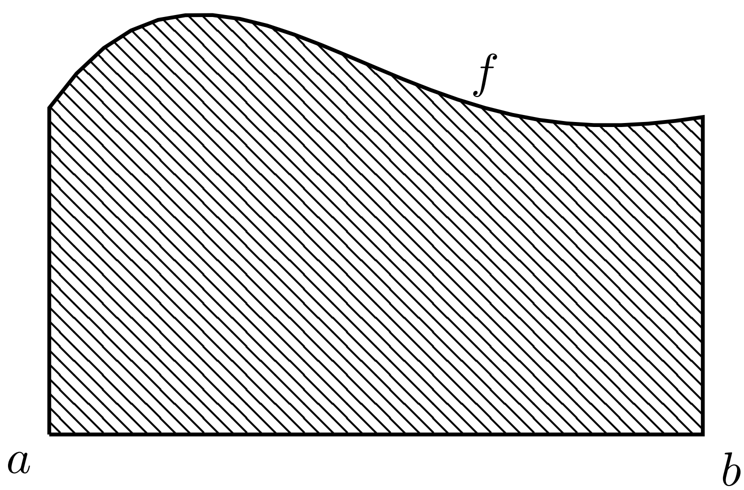
(9.2) Bewegung eines Massenpunkts

Betrachten wir jetzt solch ein Teilintervall genauer:

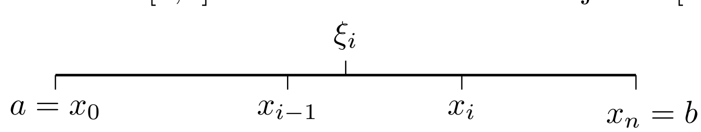
In Teil (9.3) wird im Buch analog die Arbeit an dieser Stelle abgehandelt; lesen Sie diesen Teil zu Hause durch.

(9.4) Flächeninhalt





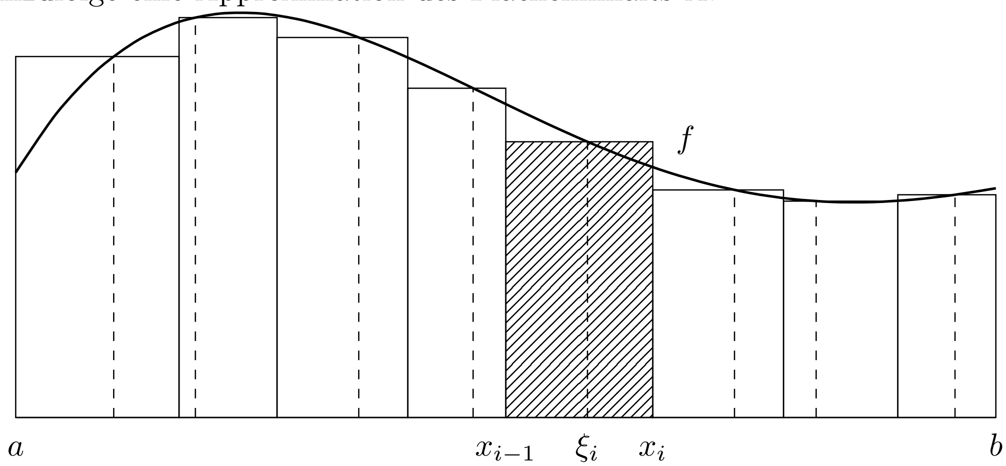
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wir möchten den Inhalt A des schraffierten Flächenstücks bestimmen. Zu diesem Zweck unterteilen wir $[a, b]$ wie vorher und wählen in jedem $[x_{i-1}, x_i]$ einen Zwischenpunkt ξ_i.



Der Ausdruck $f(\xi_i)\Delta x_i$ hat hier eine einfache Bedeutung: Es handelt sich um den Flächeninhalt des in der untenstehenden Figur schraffierten Rechtecks. Die Summe

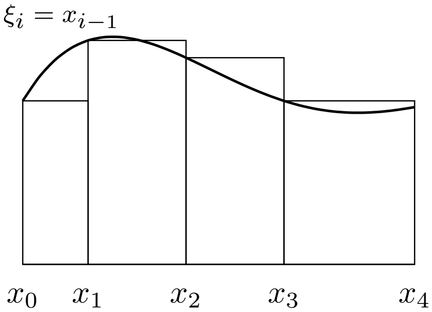
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ist dann der Inhalt der aus den einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Fläche und demzufolge eine Approximation des Flächeninhalts A:

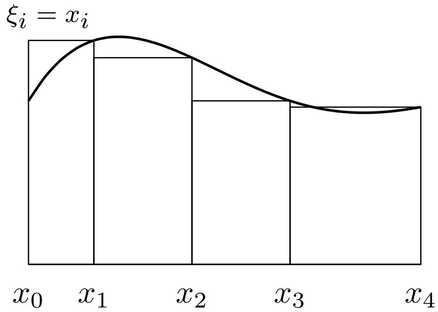


Dank der geometrischen Interpretation sieht man hier besonders gut, was bei verschiedener Wahl der Zwischenpunkte herauskommt. Wir skizzieren vier Möglichkeiten:

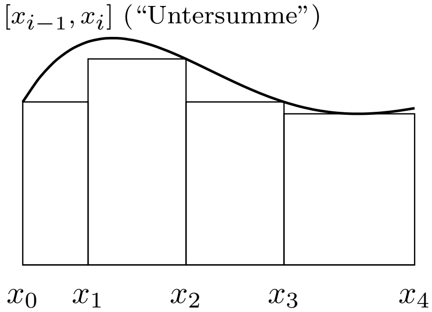
1) $\xi_i = x_{i-1}$



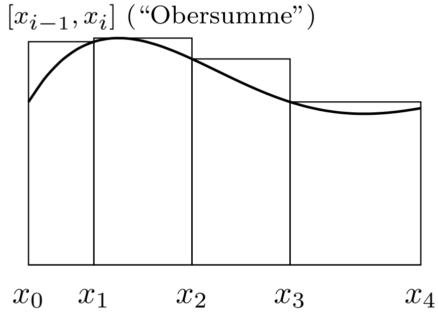
2) $\xi_i = x_i$



3) $f(\xi_i)$ kleinster Funktionswert in $[x_{i-1}, x_i]$ ("Untersumme")



4) $f(\xi_i)$ grösster Funktionswert in $[x_{i-1}, x_i]$ ("Obersumme")



Um den gesuchten Flächeninhalt A zu erhalten, wird man nun – wie schon in den vorangegangenen Beispielen – die Länge Δx_i der Teilintervalle gegen 0 streben lassen. Man findet dann

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

In Teil (9.5) wird im Buch analog das Volumen von Rotationskörpern abgehandelt; lesen Sie diesen Teil zu Hause durch.

(9.6) Zusammenfassung

Wir haben in den vier besprochenen Beispielen gesehen, dass in ganz verschiedenen Situationen dieselbe mathematische Konstruktion auftritt, nämlich ein Grenzwert, der (abgesehen von den Bezeichnungen) stets die Form

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

hat, wofür man auch als Abkürzung

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

schreibt.

Diese vier Fälle haben einen gemeinsamen Kern:

> Wir suchen eine mathematische Beschreibung einer Grösse (aus den Naturwissenschaften oder der Mathematik), für die folgendes gilt:
>
> - Sie kann durch Summation von vielen kleinen Teilgrössen angenähert werden.
> - Diese Annäherung ist um so besser, je kleiner (und damit je zahlreicher) die Teilgrössen sind.
>
> Unter diesen Voraussetzungen ist die gesuchte Grösse der Grenzwert dieser Näherungssummen. Ein derartiger Grenzwert wird als bestimmtes Integral bezeichnet.

Da dieser Gedankengang auch in vielen anderen Fällen auftritt, ist es zweckmässig, die hier erläuterte Konstruktion ein für allemal und losgelöst von speziellen Beispielen durchzuführen. Dies soll im nächsten Kapitel geschehen. Man gelangt so zum Begriff des bestimmten Integrals, das als wichtiges Werkzeug in vielen Situationen Anwendung findet. Dieses bestimmte Integral wird im nächsten Kapitel allgemein definiert. In den weiteren Kapiteln werden wir dann sehen, wie es effektiv berechnet werden kann, und weitere Anwendungen kennenlernen.

Wichtig: Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch. Einige Beispiele (Arbeit, Rotationskörper) haben wir aus Zeitgründen nicht besprochen, sie kommen aber in den Übungen oder der Prüfung vor.

Lessons learnt: In verschiedenen Situationen haben wir:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Betrachten Sie eine Funktion f auf dem Intervall $[0, 2]$. Wie können Sie die Fläche unter der Kurve f auf diesem Intervall annähern, indem Sie Rechtecke verwenden? (Mehrere Antworten möglich)

A) Durch die Verwendung von n gleich breiten Rechtecken und der Berechnung der Summe der Flächen dieser Rechtecke, wobei die Höhe jedes Rechtecks der Funktionswert an der linken Seite des Intervalls ist.

B) Durch die Verwendung von n gleich breiten Rechtecken und der Berechnung der Summe der Flächen dieser Rechtecke, wobei die Höhe jedes Rechtecks der Funktionswert an der rechten Seite des Intervalls ist.

C) Durch die Verwendung von n gleich breiten Rechtecken und der Berechnung der Summe der Flächen dieser Rechtecke, wobei die Höhe jedes Rechtecks der Funktionswert in der Mitte des Intervalls ist.

D) Keine der oben genannten Methoden ist geeignet, um die Fläche unter der Kurve anzunähern.

Frage 2: Welche der folgenden Aussagen beschreibt am besten, wie sich die Genauigkeit der Annäherung der Fläche unter einer Funktion $f(x)$ durch Rechtecke ändert, wenn die Breite der Rechtecke, also Δx, gegen 0 strebt?

A) Die Genauigkeit der Annäherung bleibt unverändert, egal wie breit die Rechtecke sind.

B) Die Genauigkeit der Annäherung verschlechtert sich, wenn Δx gegen 0 strebt.

C) Die Genauigkeit der Annäherung verbessert sich, wenn Δx gegen 0 strebt.

Frage 3: Wenn man die Fläche unter einer stetigen Funktion $f(x)$, in einem geschlossenen Intervall, durch die Summe der Flächen von Rechtecken annähert, wird diese Annäherung genau der tatsächlichen Fläche entsprechen, wenn die Breite der Rechtecke, also Δx, nach 0 strebt. Wahr oder Falsch

Frage 4: Wenn $f(x) = c$ eine konstante Funktion ist, dann ist die Fläche unter der Kurve $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ gleich $c \cdot (b - a)$. Somit reicht bereits ein Rechteck, um die Fläche genau zu bestimmen. Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen:

Frage 1: Die korrekten Antworten sind A, B und C, da diese Methoden die Fläche unter der Kurve durch Rechtecke annähern, wobei die Wahl des Punktes zur Bestimmung der Höhe der Rechtecke zum gleichen Resultat führt; Frage 2: richtig ist C; Frage 3: Wahr. Wenn die Breite der Rechtecke sehr klein ist, wird die Annäherung immer genauer. In der Grenze, wenn Δx gegen 0 strebt, nähert sich die Summe der Rechtecksflächen genau der Fläche unter der Kurve an; Frage 4: Wahr. Bei einer konstanten Funktion $f(x) = c$ ist die Höhe der Rechtecke, die zur Annäherung der Fläche verwendet werden, konstant und gleich c. Die Breite der Rechtecke ist $(b-a)$. Die Fläche unter der Kurve ist daher das Produkt aus der konstanten Hhe c und der Breite des Intervalls $(b-a)$.