C. INTEGRALRECHNUNG

9. EINLEITENDE BEISPIELE ZUM BEGRIFF DES INTEGRALS

* Bewegung Massenpunkt: in der Vlsg

* Arbeit (Physik): zu Hause

* Fläche unter der Kurve: in der Vlsg

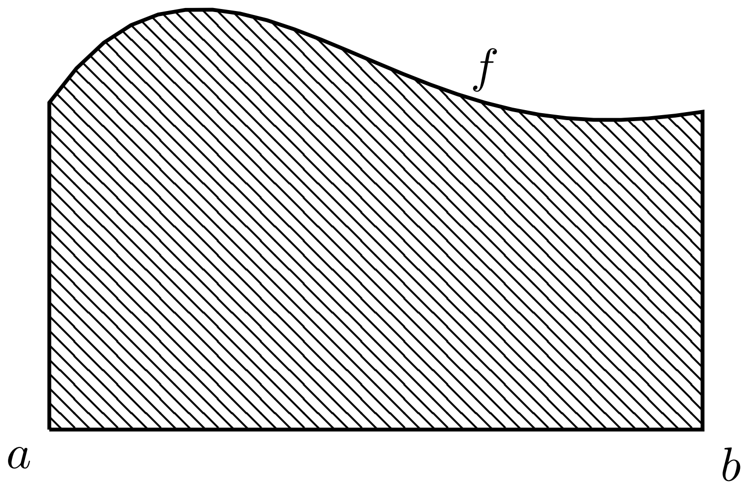
* Volumen Rotationskörper: zu Hause

(9.2) Bewegung eines Massenpunkts

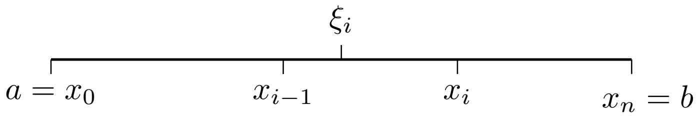
Betrachten wir jetzt solch ein Teilintervall genauer:

In Teil (9.3) wird im Buch analog die Arbeit an dieser Stelle abgehandelt; lesen Sie diesen Teil zu Hause durch.

(9.4) Flächeninhalt



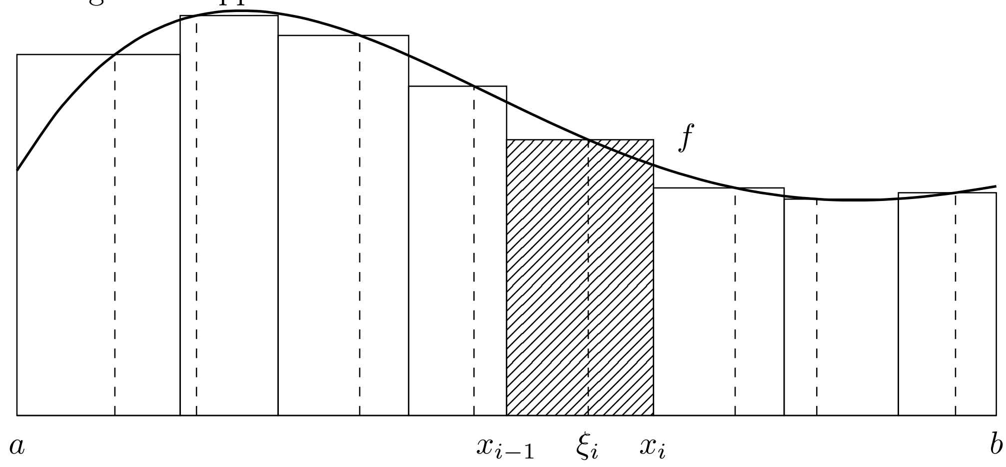
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir möchten den Inhalt A des schraffierten Flächenstücks bestimmen. Zu diesem Zweck unterteilen wir $[a,b]$ wie vorher und wählen in jedem $[x_{i-1}, x_i]$ einen Zwischenpunkt ξ_i.



Der Ausdruck $f(\xi_i)\Delta x_i$ hat hier eine einfache Bedeutung: Es handelt sich um den Flächeninhalt des in der untenstehenden Figur schraffierten Rechtecks. Die Summe

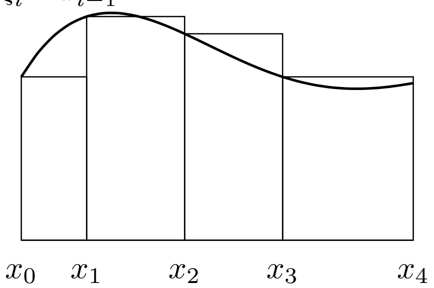
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ist dann der Inhalt der aus den einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Fläche und demzufolge eine Approximation des Flächeninhalts A:

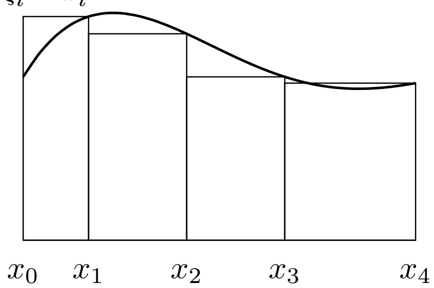


Dank der geometrischen Interpretation sieht man hier besonders gut, was bei verschiedener Wahl der Zwischenpunkte herauskommt. Wir skizzieren vier Möglichkeiten:

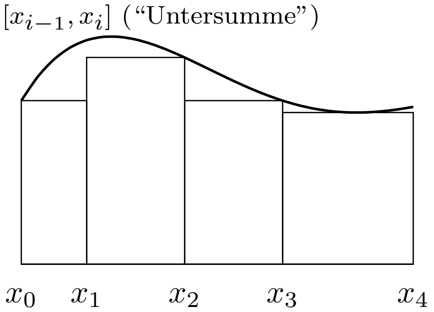
1) $\xi_i = x_{i-1}$



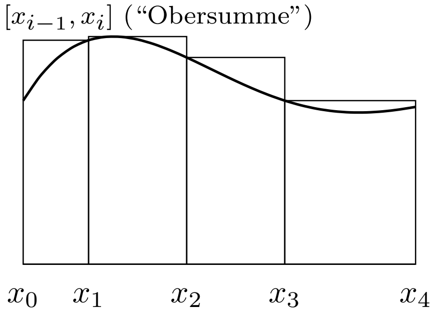
2) $\xi_i = x_i$



3) $f(\xi_i)$ kleinster Funktionswert in $[x_{i-1}, x_i]$ ("Untersumme")



4) $f(\xi_i)$ grösster Funktionswert in $[x_{i-1}, x_i]$ ("Obersumme")



Um den gesuchten Flächeninhalt A zu erhalten, wird man nun – wie schon in den vorangegangenen Beispielen – die Länge Δx_i der Teilintervalle gegen 0 streben lassen. Man findet dann

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx \; .$$

In Teil (9.5) wird im Buch analog das Volumen von Rotationskörpern abgehandelt; lesen Sie diesen Teil zu Hause durch.

(9.6) Zusammenfassung

Wir haben in den vier besprochenen Beispielen gesehen, dass in ganz verschiedenen Situationen dieselbe mathematische Konstruktion auftritt, nämlich ein Grenzwert, der (abgesehen von den Bezeichnungen) stets die Form

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

hat, wofür man auch als Abkürzung

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

schreibt.

Diese vier Fälle haben einen gemeinsamen Kern:

> Wir suchen eine mathematische Beschreibung einer Grösse (aus den Naturwissenschaften oder der Mathematik), für die folgendes gilt:
>
> - Sie kann durch Summation von vielen kleinen Teilgrössen angenähert werden.
> - Diese Annäherung ist um so besser, je kleiner (und damit je zahlreicher) die Teilgrössen sind.
>
> Unter diesen Voraussetzungen ist die gesuchte Grösse der Grenzwert dieser Näherungssummen. Ein derartiger Grenzwert wird als bestimmtes Integral bezeichnet.

Da dieser Gedankengang auch in vielen anderen Fällen auftritt, ist es zweckmässig, die hier erläuterte Konstruktion ein für allemal und losgelöst von speziellen Beispielen durchzuführen. Dies soll im nächsten Kapitel geschehen. Man gelangt so zum Begriff des bestimmten Integrals, das als wichtiges Werkzeug in vielen Situationen Anwendung findet. Dieses bestimmte Integral wird im nächsten Kapitel allgemein definiert. In den weiteren Kapiteln werden wir dann sehen, wie es effektiv berechnet werden kann, und weitere Anwendungen kennenlernen.

Wichtig: Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch. Einige Beispiele (Arbeit, Rotationskörper) haben wir aus Zeitgründen nicht besprochen, sie könnten aber in den Übungen oder der Prüfung vorkommen.