8. DIE ABLEITUNG EINER VEKTORFUNKTION

(8.2) Vektorfunktionen

Zur Orientierung:

* Der $\mathbb{R}^3$ ist für einige anspruchsvoll - aber wir brauchen ihn in den Naturwissenschaften.

* Eine Abbildung $t \to \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ kann auf 2 Arten aufgefasst werden:
a) dynamisch: Bewegung eines Massenpunktes im Raum
b) statisch: Parameterdarstellung von Kurven im $\mathbb{R}^3$.

* In (3.2) war die Bewegung eines Fahrzeuges geradlinig, allenfalls beschleunigt. Dort konnten wir, ohne uns um Betrag und Richtung zu kümmern, die Geschwindigkeit als Ableitung der Strecke nach der Zeit herleiten: $\dot{s} = v$. Neu wird im $\mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit ein Vektor sein und der Betrag des Vektors ist dann die Schnelligkeit, sie entspricht der früheren Geschwindigkeit, der Anzeige auf dem Tachometer.

* * *

Zur Zeit t befinde sich der Massenpunkt im Punkt R. Seine Lage wird also durch den Vektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{OR}$$

festgelegt.

Da sich der Punkt R und damit der Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ im Verlauf der Zeit ändert, schreibt man statt $\vec{r}$ besser

$$\vec{r}(t) .$$

Der Vektor $\vec{r}$ wird also als Funktion einer Variablen (in unserem Beispiel der Zeit t) aufgefasst. Man spricht von einer vektorwertigen Funktion oder einer *Vektorfunktion*.

Um mit diesen Vektorfunktionen rechnerisch umgehen zu können, führt man wie in Kapitel 2 ein kartesisches Koordinatensystem ein. Bezüglich dieses Systems hat $\vec{r}(t)$ dann die Koordinaten

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}.}$$

Mit $\vec{r}(t)$ hängen auch die Koordinaten $r_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ von der Zeit t ab. Da $r_i(t)$ stets eine reelle Zahl ist, sind die *Koordinatenfunktionen* (auch Komponentenfunktionen genannt) $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ gewöhnliche Funktionen einer Variablen.

Eine Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ wird also durch drei reellwertige Funktionen dargestellt. Statt $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ kann man auch $x(t), y(t), z(t)$ schreiben.

<u>Beispiele</u>

2. Wir betrachten die Vektorfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da hier die z–Koordinate (3. Koordinate) gleich 0 ist, liegt der Vektor $\vec{r}(t)$ stets in der x-y–Ebene. (Man könnte die 3. Koordinate auch einfach weglassen; im Hinblick auf Beispiel 4. tun wir dies nicht!) Wegen der bekannten Formel $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ liegen die Punkte mit den Koordinaten $x = \cos t, y = \sin t$ auf dem Einheitskreis. Somit beschreibt der Vektor $\vec{r}(t)$ eine *Kreisbewegung* (im Gegenuhrzeigersinn) eines Massenpunktes in der x-y–Ebene. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkte (1,0), ebenso zur Zeit $t = 2\pi$, wo er einen Umlauf vollendet hat (und analog für jeden Zeitpunkt $t = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$).

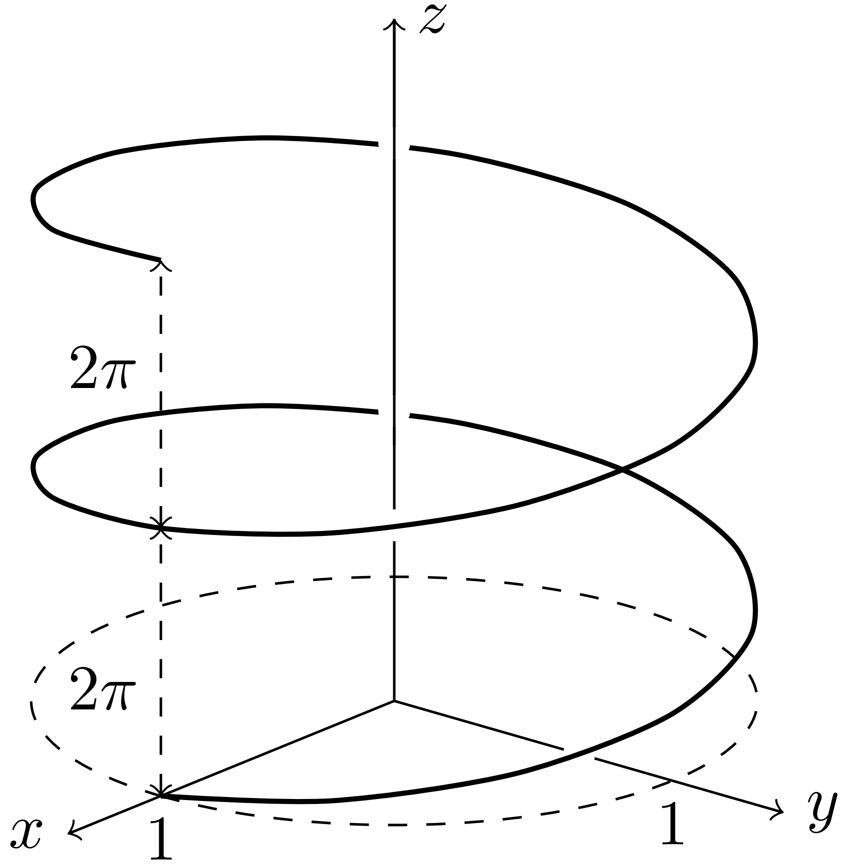
4. Schliesslich sei
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$
Im Gegensatz zu 2. liegt hier der Vektor $\vec{r}(t)$ i.a. nicht in der x-y–Ebene, vielmehr hat sein Endpunkt zur Zeit t die "Höhe" (z–Koordinate) t.

Die Projektion von $\vec{r}(t)$ auf die x-y–Ebene aber ist genau wie im Beispiel 2. der Einheitskreis.

Zur Zeit $t = 0$ ist $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zur Zeit $t = 2\pi$ ist $\vec{r}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$.

Hieraus erkennt man, dass $\vec{r}(t)$ eine *Schraubenlinie* mit "Ganghöhe" 2π und "Umlaufszeit" 2π beschreibt.



Kleine Übungen:

Zusatzfrage:

(8.3) Parameterdarstellungen von Kurven

Manchmal interessiert man sich weniger für den Bewegungsvorgang als für die Bahnkurve als geometrisches Gebilde. Die Variable t braucht in diesem Fall nicht als Zeit aufgefasst zu werden und wird *“Parameter”* genannt.

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ist dann *eine* Parameterdarstellung eines Umlaufs der Schraubenlinie.

Bei dieser Auffassung (welche wohlgemerkt auf denselben Formeln wie in (8.2) beruht) interessiert man sich also nicht für die Bewegung an sich, sondern für die durchlaufene Bahn, die “Spur” des Massenpunkts. Es handelt sich also um eine “statische” Interpretation, im Gegensatz zur “dynamischen” aus (8.2).

Im Beispiel 2 von (8.2) ist es für den Ablauf der Bewegung sicher wesentlich, ob der Kreis ein- oder zweimal durchlaufen wird. Die Bahnkurve bleibt aber so oder so der Einheitskreis.

Was ist der Unterschied zwischen den folgenden 3 Gebilden (jeweils Darstellung einer Strecke AB)?

$(*)$ $$\vec{u}(t) = \vec{a} + t\vec{c}, \quad t \in [0, 1]$$

$(**)$ $$\vec{v}(t) = \vec{a} + 2t\vec{c}, \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

$(***)$ $$\vec{w}(t) = \vec{a} + (1 - t)\vec{c}, \quad t \in [0, 1]$$

Wir kommen nun nochmals auf die graphische Darstellung von Kurvenstücken zu sprechen. Mit etwas Geschick lässt sich ein durch eine Parameterdarstellung gegebenes Kurvenstück C skizzieren. Natürlich kann diese Aufgabe auch einem passenden Computerprogramm übertragen werden (nicht an der Prüfung!).

Beispiele

1. Es sei
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$
Wir betrachten zuerst die Projektion auf die x-y–Ebene. Es ist $x = r_1(t) = t,\ y = r_2(t) = t^2$, also $y = x^2$. Die Projektion von C auf die x-y–Ebene ist daher eine Parabel. Ferner ist die Projektion von C auf die x-z–Ebene wegen
$$x = r_1(t) = t, \quad z = r_3(t) = 1-t$$
eine Gerade. Zeichnet man die Parabel und die Gerade ein, so lässt sich auch C skizzieren.

(8.4) Die Ableitung einer Vektorfunktion

Wir motivieren die Definition am Beispiel der Bewegung eines Massenpunkts. Diese Bewegung sei durch die "Ortsfunktion" $\vec{r}(t)$ gegeben. Wir betrachten die Werte dieser Funktion zu zwei Zeitpunkten t_0 und $t_0 + \Delta t$:

Die Differenz $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ ist gleich dem Vektor $\overrightarrow{PQ}$. In der Zeitspanne Δt hat sich der Massenpunkt von P nach Q bewegt (im allgemeinen natürlich nicht geradlinig längs des Vektors, sondern auf einer gekrümmten Bahn). Beziehen wir die Änderung auf die Zeiteinheit, d.h., dividieren wir durch Δt, so erhalten wir

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \ .$$

Diese Grösse heisst die *mittlere Geschwindigkeit* (im Zeitintervall $[t_0, t_0 + \Delta t]$). Es handelt sich dabei um einen *Vektor*, der die Richtung der mittleren Geschwindigkeit anzeigt und dessen Betrag ein Mass für die Schnelligkeit der Bewegung ist.

Der Ausdruck $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ist nichts anderes als ein vektorieller *Differenzenquotient* (vgl. das Analogon in (4.3.b)).

Um nun die Momentangeschwindigkeit (kurz: *Geschwindigkeit*) zur Zeit t_0 zu erhalten, lassen wir wie in (3.2) Δt gegen 0 streben, d.h., wir bilden

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \ .$$

Dieser Vektor heisst natürlich die *Ableitung* des Vektors $\vec{r}(t)$ an der Stelle t_0. Mit anderen Worten: Die Geschwindigkeit ist als Ableitung der Ortsfunktion definiert.

Losgelöst von diesem speziellen physikalischen Beispiel definiert man allgemein:

Die Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ heisst an der Stelle t_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

existiert. Dieser Grenzwert heisst die *Ableitung* von $\vec{r}(t)$ an der Stelle t_0 und wird mit

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \quad \text{oder} \quad \vec{r}\,'(t_0) \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{r}}(t_0)$$

bezeichnet.

Es sei nochmals betont, dass die Ableitung eines Vektors wieder ein Vektor ist!

Die zwei Interpretationen von $\dot{\vec{r}}(t_0)$:

<u>dynamisch</u>

$\vec{r}(t)$ ist der Ortsvektor
$\dot{\vec{r}}(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor
$|\dot{\vec{r}}(t)|$ ist die Schnelligkeit, Anzeige Tachometer

<u>statisch</u>

$\vec{r}(t)$ ist Parameterdarstellung Kurve
$\dot{\vec{r}}(t_0)$ ist Tangentenrichtung an Kurve bei t_0

$\boxed{\text{(8.5) Berechnung der Ableitung}}$

Zur praktischen Berechnung der Ableitung verwendet man die Koordinatenfunktionen. Es sei

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} \dfrac{r_1(t+\Delta t) - r_1(t)}{\Delta t} \\ \dfrac{r_2(t+\Delta t) - r_2(t)}{\Delta t} \\ \dfrac{r_3(t+\Delta t) - r_3(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \dot{r}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Wir haben gefunden:

Die Vektorfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$$

wird koordinatenweise abgeleitet, d.h., es ist

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \dot{r}_3(t) \end{pmatrix}.$$

<u>Beispiele</u>

1. Wir analysieren die Bewegung längs einer Schraubenlinie

$$(\sharp) \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Jetzt noch die Schnelligkeit (Tachometer):

2. Wir variieren dieses Beispiel noch etwas. Durch

$$(\sharp\sharp) \qquad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

wird dieselbe Schraubenlinie (als geometrisches Gebilde) beschrieben. Was ist jetzt anders?

(8.6) Ableitungsregeln für Vektorfunktionen

In Analogie zu (5.2) gelten die folgenden Regeln für die Ableitung:

(1) Summe: $(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))^{\cdot} = \dot{\vec{u}}(t) + \dot{\vec{v}}(t)$

(2) Differenz: $(\vec{u}(t) - \vec{v}(t))^{\cdot} = \dot{\vec{u}}(t) - \dot{\vec{v}}(t)$

(3) Produkt mit (konstantem) Skalar: $(r\vec{u}(t))^{\cdot} = r\dot{\vec{u}}(t) \quad (r \in \mathbb{R})$

(4) Produkt mit (skalarer) Funktion: $(r(t)\vec{u}(t))^{\cdot} = \dot{r}(t)\vec{u}(t) + r(t)\dot{\vec{u}}(t)$

(5) Skalarprodukt von Vektoren: $(\vec{u}(t)\vec{v}(t))^{\cdot} = \dot{\vec{u}}(t)\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\dot{\vec{v}}(t)$

(6) Vektorprodukt: $(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t))^{\cdot} = \dot{\vec{u}}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \dot{\vec{v}}(t)$

Beachten Sie, dass (4), (5) und (6) gerade die Form der üblichen Produktregel für reellwertige Funktionen haben. Wegen der Antikommutativität des Vektorprodukts ist in (6) speziell auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten.

Kleine Übung: Ein Massenpunkt bewegt sich gemäss

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Bahnkurve für $t \in [0, 1]$.
b) Welchen Betrag hat die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$?
c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Schnelligkeit minimal ($t \in [0, 1]$)? Wie gross ist sie dann?

Fortsetzung:

Trick zur Auffindung von Extrema bei Funktionen, wenn die äusserste Funktion eine Wurzel, ein Logarithmus, oder die Exponentialfunktion sind:

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.