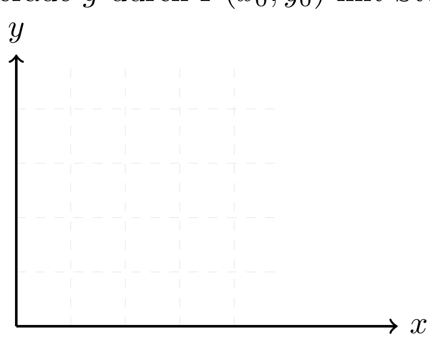
7. LINEARISIERUNG UND DAS DIFFERENTIAL

Warum? Linearisierung, da Mensch nur linear denken kann: 10 Stunden mit 100 Kilometern pro Stunde gibt 1000 Kilometer ($s = vt$). Bankkonto nimmt jedes Jahr um 2 % zu; gibt Zinseszins; nicht linear; schwierig.

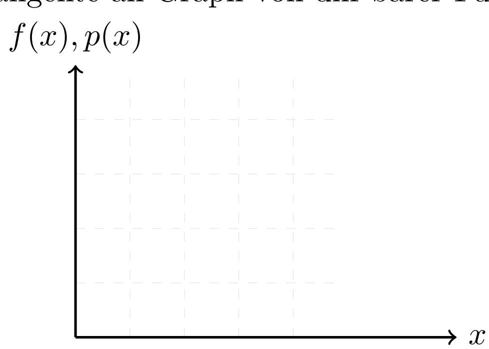
Idee: Graph der Funktion durch Tangente ersetzen!

(7.2) Die Tangentengleichung

1. Gerade g durch $P(x_0, y_0)$ mit Steigung m:



2. Tangente an Graph von diff'barer Funktion:



(7.3) Linearisierung einer Funktion ("Gerade anpassen")

Ein Blick auf die obige Skizze zeigt, dass die lineare Funktion

(1) $$\boxed{p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

in der Nähe von x_0 eine gute Approximation der gegebenen Funktion $f(x)$ ist. Die Funktionen f und p haben nämlich an der Stelle x_0 denselben Funktionswert und dieselbe Ableitung:

$$f(x_0) = p(x_0) \; ,$$
$$f'(x_0) = p'(x_0) \; .$$

Anders ausgedrückt: An der Stelle x_0 stimmen die 0. und die 1. Ableitung von f und p überein. (Unter der 0. Ableitung versteht man bekanntlich die Funktion selbst, siehe (4.5).)

In der Nähe von x_0 gilt also:

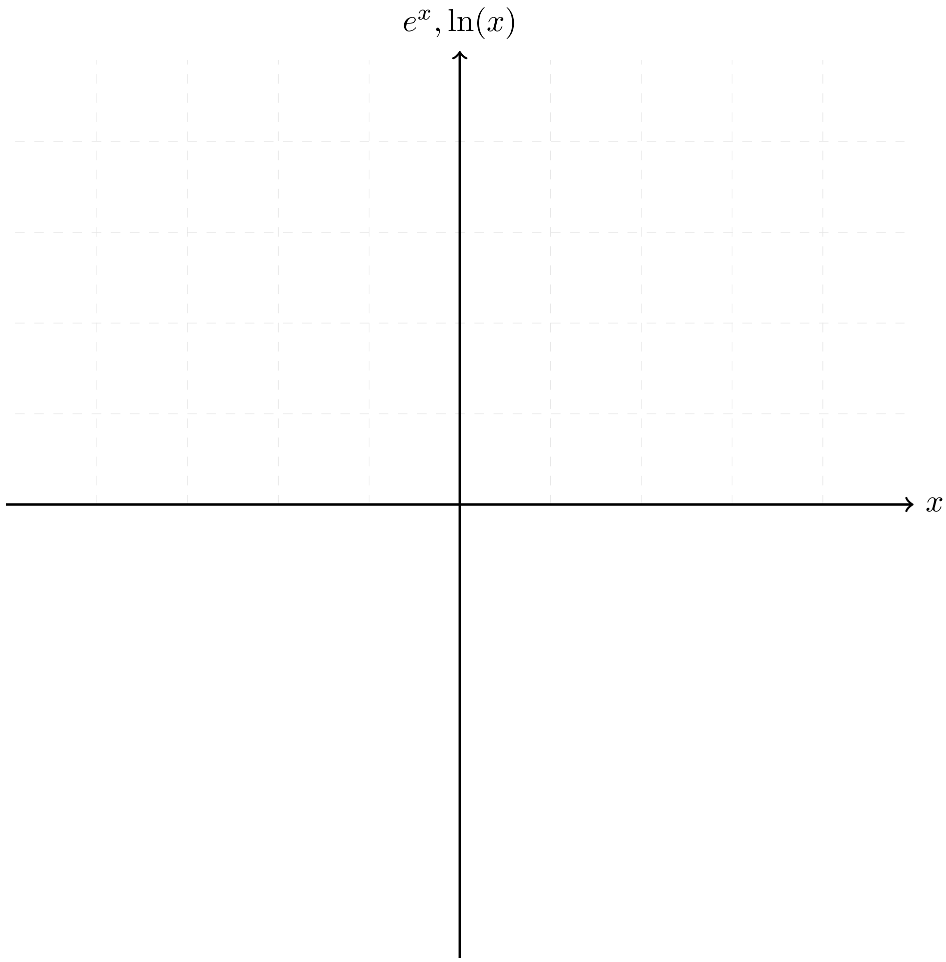
(2) $$\boxed{f(x) \approx p(x)}$$

(das Zeichen $\approx$ bedeutet wie $\doteq$ "ungefähr gleich").

Nun ist eine lineare Funktion wie p natürlich einfacher zu handhaben als die beliebige Funktion f. Man macht sich dies manchmal zunutze, indem man $f(x)$ durch $p(x)$ ersetzt. Man nennt dann p eine "*lineare Ersatzfunktion*" oder man sagt, man habe f "*linearisiert*". Die folgende Tabelle enthält einige Beispiele:

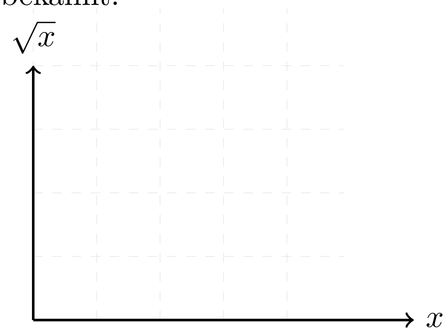
$f(x)$	$f'(x)$	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$p(x)$
e^x	e^x	0	1	1	$1+x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	1	0	1	$x-1$
$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}x$
$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$	3	2	$\frac{1}{4}$	$2+\frac{1}{4}(x-3)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	0	1	0	1

Bilder zu Beispielen 1-2:

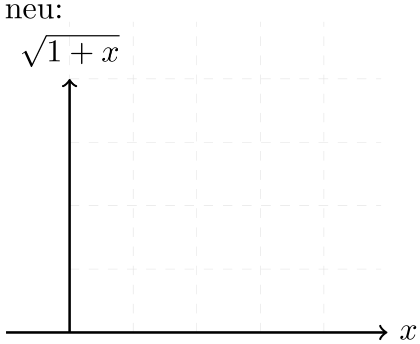


Bilder zu Beispielen 3-4:

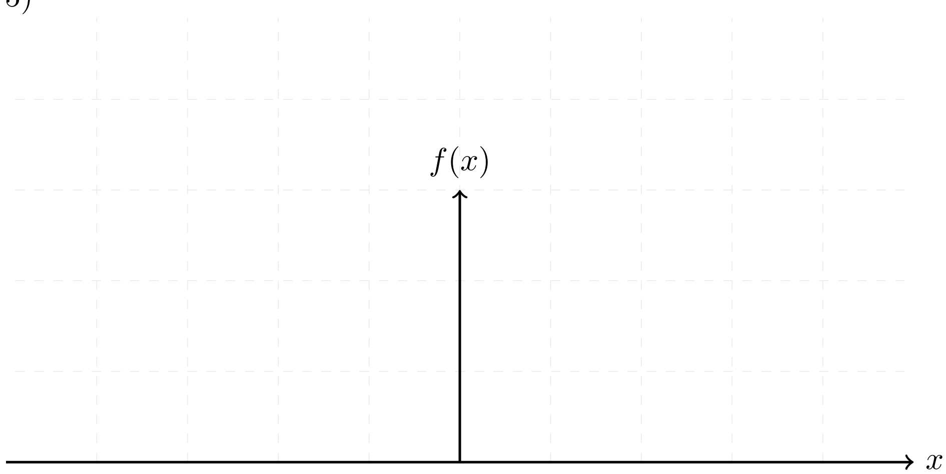
bekannt:



neu:



5)



Hinweise

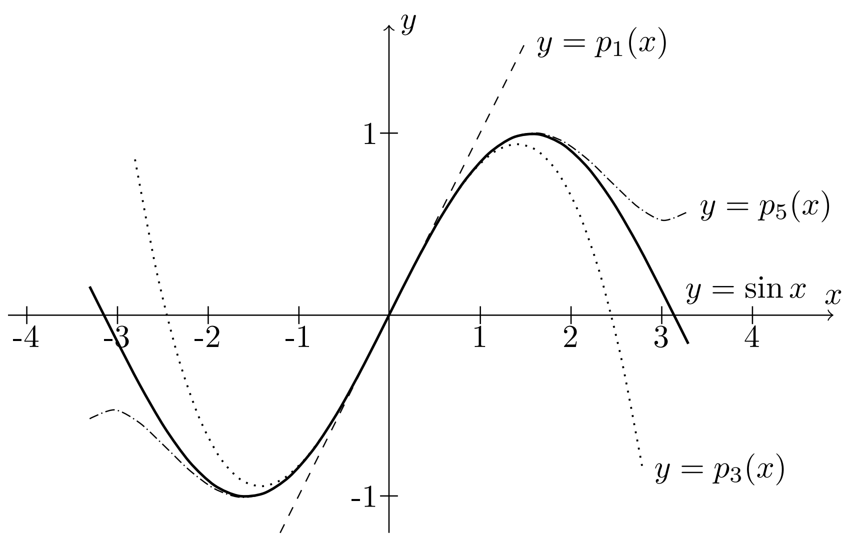
1. Setzen wir im 4. Beispiel der Tabelle $x = 3.01$ (nahe bei $x_0 = 3$), so finden wir

$$f(x) = \sqrt{4.01} = 2.002498\ldots\ ,$$
$$p(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.01 = 2.0025\ .$$

Die Approximation ist, wie man sieht, sehr gut. ☒

2. Beachten Sie, dass die lineare Ersatzfunktion von der gewählten Stelle x_0 abhängt. Im 3. und 4. Beispiel aus der Tabelle linearisieren wir beide Male die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$, verwenden aber zwei verschiedene Werte von x_0. Für $x_0 = 0$ erhalten wir $p(x) = \frac{1}{2}x + 1$, für $x_0 = 3$ aber $p(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.
3. Wie das 5. Beispiel aus der Tabelle zeigt, kann es ohne weiteres vorkommen, dass $p(x)$ eine konstante Funktion ist (dies tritt genau dann ein, wenn $f'(x_0) = 0$ ist).

In Kapitel 19 werden wir sehen, dass man als Ersatzfunktionen nicht nur lineare Funktionen, sondern auch Polynome n–ten Grades nehmen kann (Polynome sind auch relativ einfach!), dazu eine kleine Illustration:



Dabei sind $y = \sin x$ und

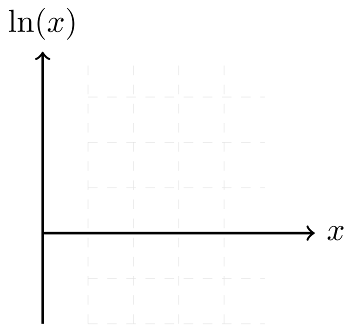
$p_1(x) = x,$
$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}\ ,$
$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$

Die Konsequenzen von Beispiel 2) für Ihr Bankbüechli und alles was sonst noch exponentiell (stetige Zeit) oder geometrisch (diskrete Zeit) wächst, 3 Vorbemerkungen:

a) von 2), p-4: $\ln x \doteq x - 1$, wenn $x \doteq 1$. Anders formuliert: wenn $x := 1 + h$ für ein kleines (positives oder negatives) h, dann gilt:

$$\ln(1+h) = \ln x \doteq x - 1 = 1 + h - 1 = h.$$

Damit gilt z.B. $\ln(1.1) \doteq 0.1$ (wähle $h = 0.1$) oder auch $\ln(0.9) \doteq -0.1$ (wähle $h = -0.1$):



b) Bankkonto, Zins und Zinseszins:

100 CHF + 2% = 102 CHF

102 CHF + 2% $\doteq$ 104 CHF - auf jeden Fall > 104 CHF wegen *Zinseszins*.

Analog geht auch Bevölkerungswachstum, Wirtschaftswachstum, CO2-Ausstoss, mehr in Kapitel 15.

c) stetige versus diskrete Zeitmessung:

* oft beides möglich (Jahresendzins versus unterjährige Verzinsung)

* eingebürgerte Bezeichnungen und Formeln:

diskrete Zeitmessung:
Zeit mit m, n angegeben
Rate mit r
Formel zB: $K(1+r)^n$

stetige Zeitmessung:
Zeit mit t, s angegeben
Rate mit λ
Formel zB: $Ke^{\lambda t}$

Bei Wachstum von 2% pro Jahr haben wir also diskret $r = 0.02$ und $K(1.02)^n$. Wie gross ist dann λ bei stetiger Modellierung? Siehe Übungen Blatt 12.

Verdoppelungs- und Halbwertszeiten - wie lange bis Verdoppelung?

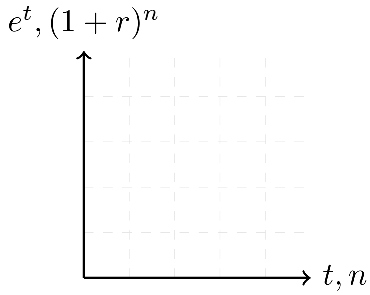
In einer Übungsaufgabe (Must-Teil Blatt 6) zeigen Sie noch, dass bei einem Rückgang obige Formel auch gilt: $n \doteq 70/(\text{Rate in Prozent})$, also zum Beispiel:

Artikel von mir im Schweizer Monat: `www.schweizermonat.ch/die-geheime-formel`.

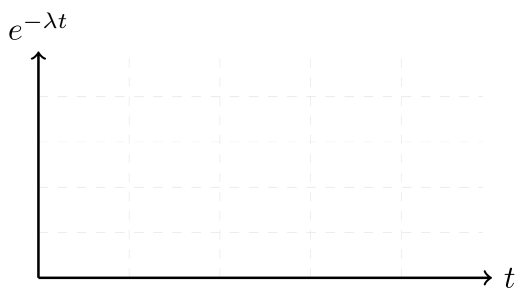
Weitere Betrachtungen zu 10 Halbwerts- und Verdoppelungszeiten (hintereinander):

Auswendig: $2^{10} =$

RAUF:



RUNTER: Halbwertszeiten: radioaktives Jod-131: $T_{1/2} =$



$\lambda > 0$ ist dabei der Zerfallsparameter; je nach Isotop anders. Zusammenhang λ und $T_{1/2}$ in Kapitel 15 und MAT183, kleine Rechnung liefert $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

Eine kleine Warnung: obiges Beispiel geht von einer homogenen Ausgangsmenge (Jod 131) ohne Zerfallsreihen aus. Bei radioaktiven Abfällen ist die Ausgangsmenge aber inhomogen und es gibt relevante Zerfallsreihen; mehr in Kapitel 15. Weiter ist Vorsicht geboten bei mehr als 10 Halbwertszeiten: 1024 ist nicht gleich 1000 und Approximationsfehler gehen hier multiplikativ ein (siehe auch gleich nachfolgend in (7.5) das Thema "Fehlerfortpflanzung").

"Jesusrappen" zu 1 bzw 2 %: exakt und approximativ:
exakt: $0.01 \cdot 1.01^{2000} = 4'392'862$; approximativ: $70/1 = 70$ Jahre bis Verdoppelung; gibt $2000/70 \doteq 28.5$ Verdopplungen: $0.01 \cdot 2^{30} \doteq 0.01 \cdot 1000^3 = 10'000'000$, also leicht weniger als $5'000'000$ (da 28.5 nahe 29). 2% als HA.

(7.4) Das Differential

In diesem Abschnitt führen wir vor allem einige neue Bezeichnungen ein. Zur in (7.3) behandelten Idee der Linearisierung kommt eigentlich nichts Wesentliches hinzu. Dort haben wir gesehen, dass gilt

$$f(x) \approx p(x)$$

d.h.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

Wir schreiben dies nun etwas anders, nämlich in der Form

(3) $$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

Wenn wir die von früher bekannten Abkürzungen $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ und $\Delta x = x - x_0$ verwenden, so hat diese Beziehung die Form

(4) $$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \ .$$

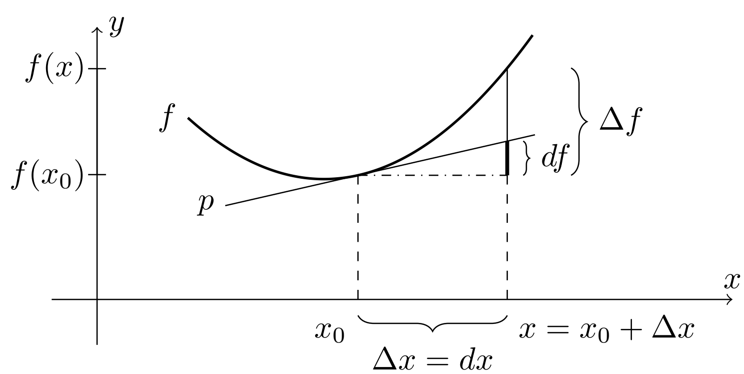
Schliesslich führen wir noch eine weitere Bezeichnung ein: Wir setzen

(5) $$\boxed{df := f'(x_0)\Delta x \ ,}$$

und aus (4) wird

(6) $$\boxed{\Delta f \approx df \ .}$$

Beachten Sie, dass (3), (4) und (6) genau dasselbe aussagen, wenn auch mit unterschiedlichen Bezeichnungen. In der folgenden Figur sind die Grössen Δf und df dargestellt.



Die Güte der Approximation ist von der Krümmung (f'') abhängig: wenn $|f''|$ gross ist, dann ist die *lineare* Approximation schlecht, da f' stark ändert.

Sie haben folgende Bedeutung:

- Δf gibt den Zuwachs der Funktion f wieder, wenn man von x_0 nach $x = x_0 + \Delta x$ geht.
- df stellt den entsprechenden Zuwachs der linearen Ersatzfunktion p (deren Graph die Tangente ist) dar.

Die Grösse df heisst das *Differential* von f. Sie hängt sowohl von der Stelle x_0 als auch vom Zuwachs Δx ab und müsste deshalb eigentlich genauer mit $df(x_0, \Delta x)$ bezeichnet werden, was aber unüblich ist (vgl. jedoch das folgende Beispiel 1.).

Aus formalen Gründen pflegt man auch dx statt Δx zu schreiben. Auf diese Weise erhält man die folgende Formel für das Differential:

$$\boxed{df = f'(x_0)\,dx\ .} \tag{7}$$

Hierbei ist dx nicht etwa eine "unendlich kleine Grösse" (was immer das sein soll), sondern eine beliebige (wenn auch meist dem Betrage nach kleine) Zahl.

Beispiele

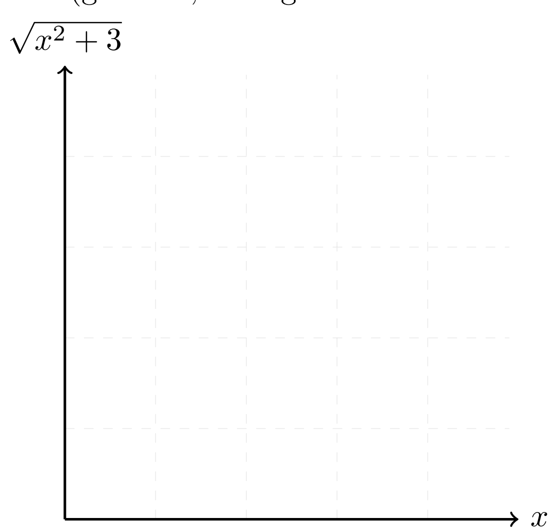
1. Es sei $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Wegen $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ ist $df = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+3}}\,dx$. Setzen wir speziell $x_0 = 1$, so erhalten wir

$$df = \frac{1}{2}\,dx\ .$$

Wählen wir nun auch noch einen Wert für dx, z.B. $dx = 0.1$, so folgt schliesslich

$$df = 0.05\ ,$$

oder (genauer, aber gewöhnlich nicht so geschrieben) $df(1,\, 0.1) = 0.05$. ⊠



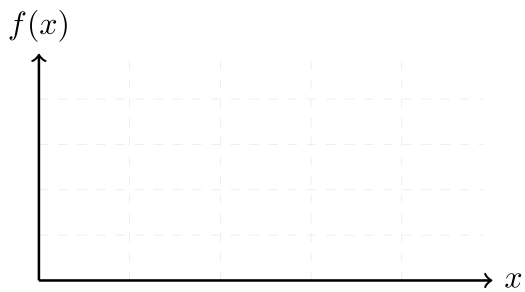
Anwendungen / Interpretationen / Ameisensicht auf die Welt

(7.5) Anwendung auf die Fehlerfortpflanzung

Langweilig - aber wichtig: MNF > NatWiss > Experimente und Beobachtungen > Daten (mit Messfehler) > Rechnen damit > Fehlerfortpflanzung > *Das* Problem: müssen abschätzen können!

Praktisch: ganze bisherige Apparat von Kapitel 7 kann eingesetzt werden; einfach neu interpretiert: x_0 ist neu der wahre Wert (*den* gibt es - wir sind in den Naturwissenschaften), x ist der gemessene Wert (mit Fehler); $\Delta x := x - x_0$ ist der absolute Fehler der sogenannten Input Quantity.

Wenden jetzt f auf x und x_0 an, was zu einer Fehlerfortpflanzung führt.



Mit Δx und f' können wir entscheiden, ob ein Messfehler sich schlimm fortsetzt oder nicht (siehe obige Skizze). Bei der sogenannten Output Quantity haben wir mit $f(x_0)$ den wahren Wert und mit $f(x)$ den aus x berechneten Wert. $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ ist der absolute Fehler des Funktionswerts.

Weil Δx klein ist, können wir jetzt auch hier Δf durch df (linear) ersetzen:

$$\Delta f \doteq df = f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x. \qquad \text{(provisorisch Fehler)}$$

In der Praxis ist x_0 unbekannt und wir verwenden notgedrungen stattdessen x. Damit bekommen wir

$$\Delta f \doteq f'(x)\Delta x. \qquad \text{(Fehler)}$$

Δx kennen wir auch nicht - aber Herstellerangaben oder KollegInnen können eventuell sagen, dass

$$|\Delta x| \leq a,$$

siehe auch nachfolgendes Beispiel.

Oben haben wir *absolute* Fehler kennengelernt. Als *relativen* Fehler der Input Quantity bezeichnet man übrigens $\Delta x/x_0$ und als *relativen* Fehler der Output Quantity bezeichnet man $\Delta f/f(x_0)$.

Beispiel: Berechne das Kugelvolumen aus dem Durchmesser; Durchmesser einfach messbar; mit Unsicherheit:

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

Gute lineare Ersatzfunktion:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$e^x \doteq 1 + x$ bei 0 und spiegelbildlich: $\ln(1 + h) \doteq h$ wenn h klein.

Verdoppelungszeit n bei Rate r [in Prozent!], diskret:

$$n \doteq \frac{70}{r}$$

Schon mal merken, mehr in Kapitel 15 und MAT183: Halbwertszeit versus Zerfallskonstante

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad , \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

und

$$\ln(2) \doteq 0.7$$

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Stimmt die folgende Aussage über die Linearisierung einer Funktion? Manchmal macht es Sinn, eine Funktion in einem Punkt x_0 zu linearisieren. Dies hat den Vorteil, dass lineare Funktionen einfacher zu handhaben sind und die linearisierte Funktion genau die gleichen Werte um x_0 hat, wie die ursprngliche Funktion. Wahr oder Falsch

Frage 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre Ableitung. Die Tangente von f bei x_0 hat die Steigung $f'(x_0)$. Die Geradengleichung dieser Tangente (Linearisierung von f in x_0) kann also beschrieben werden durch $y = f'(x_0)x$. Wahr oder Falsch

Frage 3: Die allgemeine Formel für die Linearisierung einer Funktion f in einem Punkt x_0 lautet $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Das wollen wir an einem konkreten Beispiel üben: Die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ im Punkt 0 ist $p(x) = 4x - 1$. Wahr oder Falsch

Frage 4: Die allgemeine Formel für die Linearisierung einer Funktion f in einem Punkt x_0 lautet $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Das wollen wir an einem konkreten Beispiel üben: Die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = e^x$ im Punkt 2 ist $p(x) = e^2 x - e^2$. Wahr oder Falsch

Frage 5: Die allgemeine Formel für die Linearisierung einer Funktion f in einem Punkt x_0 lautet $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Das wollen wir an einem konkreten Beispiel üben: Die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = \sin(x)$ im Punkt 0 ist $p(x) = x$. Wahr oder Falsch

Frage 6: Die allgemeine Formel für die Linearisierung einer Funktion f in einem Punkt x_0 lautet $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Das wollen wir an einem konkreten Beispiel üben: Die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = \ln(x)$ im Punkt 0 ist $p(x) = -1$. Wahr oder Falsch

Frage 7: Die allgemeine Formel für die Linearisierung einer Funktion f in einem Punkt x_0 lautet $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Das wollen wir an einem konkreten Beispiel üben: Die lineare Ersatzfunktion von $f(x) = x^3$ im Punkt 0 ist $p(x) = 0$. Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen: Frage 1: Falsch. Die linearisierte Funktion hat ungefhr gleiche Werte rund um x_0, aber muss nicht die gleichen haben; Frage 2: Falsch. Die Tangente hat wie beschrieben die Steigung $f'(x_0)$, aber in der Geradengleichung fehlt noch der y-Achsenabschnitt (oft c genannt). Die korrekte Geradengleichung lautet $y = f'(x_0)x + c$. Wenn man den Punkt $(x_0, f(x_0))$ einsetzt und umformt, erhält man $c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$; Frage 3: Wahr. $p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = -1 + 4x = 4x - 1$; Frage 4: Wahr. $p(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) = e^2 + e^2(x - 2) = e^2 x - e^2$; Frage 5: Wahr. $p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = \sin(0) + \cos(0)(x - 0) = 0 + 1x = x$; Frage 6: Falsch. Wir erinnern uns: die Logarithmusfunktion ist für $x = 0$ nicht definiert, da e^x niemals 0 sein kann. Deshalb können wir diese Funktion im Punkt 0 nicht linearisieren; Frage 7: Wahr. $p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 \cdot x = 0$.