6. ANWENDUNGEN DER ABLEITUNG

(6.2) Einige Fachausdrücke

a) <u>Intervalle</u>

Intervalle sind spezielle Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wenn a und b $(a < b)$ reelle Zahlen sind, so benutzt man folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \mid a < x < b\} && : \textit{offenes } \text{Intervall}, \\ [a,b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\} && : \textit{abgeschlossenes } \text{Intervall}, \\ \left.\begin{aligned} (a,b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \\ [a,b) &= \{x \mid a \leq x < b\} \end{aligned}\right\} & && : \textit{halboffene } \text{Intervalle}. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich schreibt man auch etwa

$$\begin{aligned} (a,\infty) &= \{x \mid x > a\}, \\ (-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\} \\ (-\infty,\infty) &= \mathbb{R} \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

In manchen Büchern gebraucht man für das offene Intervall auch das Zeichen $]a,b[$.

b) <u>ε–Umgebungen</u>

ε–Umgebungen sind spezielle offene Intervalle. Dabei ist ε eine positive Zahl (das heisst grösser 0), die in den Anwendungen gewöhnlich klein ist. Solche ε haben wir schon früher angetroffen (3.6.b), (4.6.d). Es sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann setzt man

$$U_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} .$$

$x_0 - \varepsilon \qquad x_0 \qquad x_0 + \varepsilon$

Dieses Intervall heisst die ε–*Umgebung* von x_0. $U_\varepsilon(x_0)$ besteht somit aus allen Punkten, deren Abstand von x_0 kleiner als ε ist.

c) Randpunkte und innere Punkte

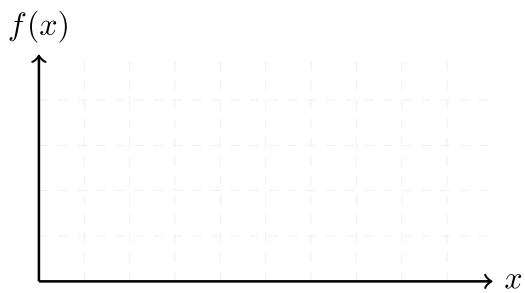
Ein halboffenes oder abgeschlossenes Intervall hat *Randpunkte*:

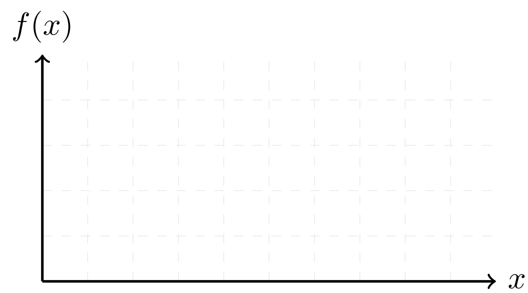
$$\begin{array}{ll} [a,b): & \text{Randpunkt } a, \\ (a,b]: & \text{Randpunkt } b, \\ [a,b]: & \text{Randpunkte } a, b\ . \end{array}$$

Die Punkte eines Intervalls I, welche keine Randpunkte sind, heissen *innere Punkte* von I. Offenbar ist x_0 genau dann ein innerer Punkt von I, wenn es eine (wenn vielleicht auch kleine) ε–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, welche ganz in I liegt.

d) Wachsende und fallende Funktionen

Es sei f eine Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$. Diese Funktion f heisst *wachsend*, wenn gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$. Entsprechend heisst f *fallend*, wenn gilt: $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$.

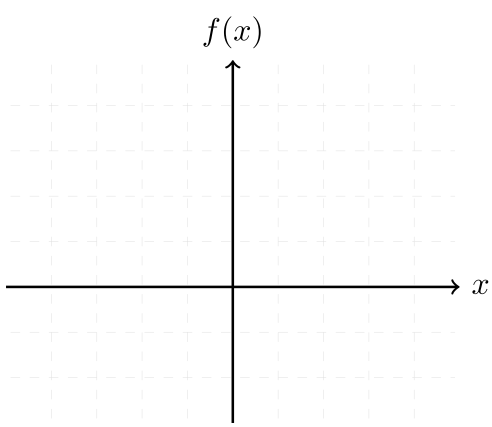




Bemerkung

In den obigen Fällen sagt man manchmal auch, f sei streng monoton wachsend (bzw. fallend). Monoton wachsend (ohne "streng") heisst dann "$f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$"; monoton fallend analog. Schliesslich heisst f monoton, wenn f entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist. Wir werden uns hier an den zuerst angegebenen einfacheren Sprachgebrauch halten.

Und was ist mit $f(x) = x^3$ an der Stelle Null?



(6.3) Wachstumsverhalten

b) Ableitung und Wachstum

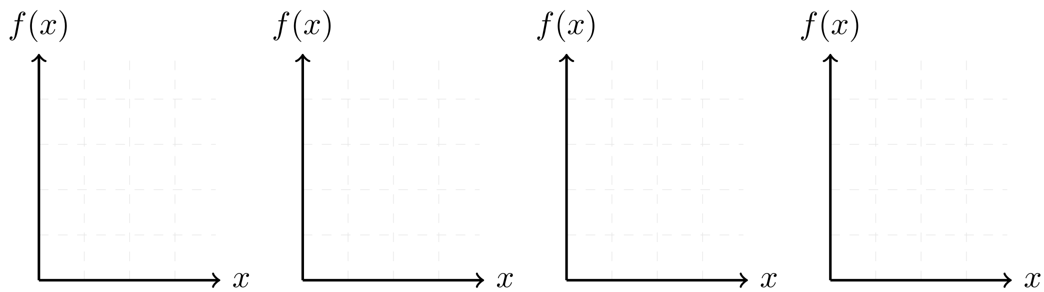
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert (und differenzierbar). Das Intervall I kann offen, abgeschlossen etc. sein; auch der Fall $I = \mathbb{R}$ ist möglich. Das Intervall I muss aber nicht unbedingt der "natürliche Definitionsbereich" sein (d.h. die grösste Teilmenge von $\mathbb{R}$, auf der f überhaupt definiert werden kann). Gerade im Zusammenhang mit den hier besprochenen Fragen wird man sich beispielsweise auf ein Intervall beschränken, in welchem die Ableitung stets positiv ist.

Wenn nun die Ableitung $f'(x) > 0$ ist, für alle x aus I, dann ist im anschaulichen Bild die Tangentensteigung in jedem Punkt des Graphen positiv (d.h. > 0), und dies bedeutet, dass die Funktion auf I wächst: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$. Entsprechendes gilt für den Fall $f'(x) < 0$, wo die Funktion fällt.

Zusammenfassend finden wir:

(1) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f$ ist auf I wachsend.

(2) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f$ ist auf I fallend.



Wie man sieht, kann die "Krümmung des Graphen" unterschiedlich sein, näheres dazu in (6.4).

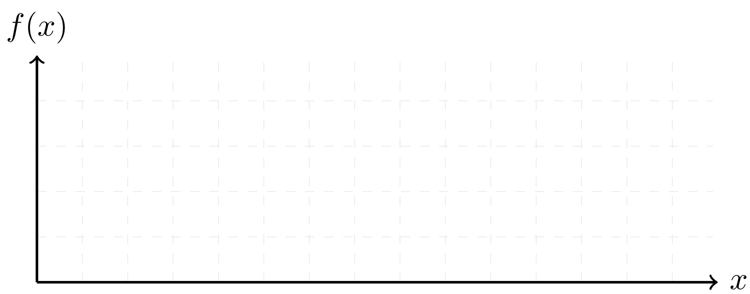
Eine Warnung:

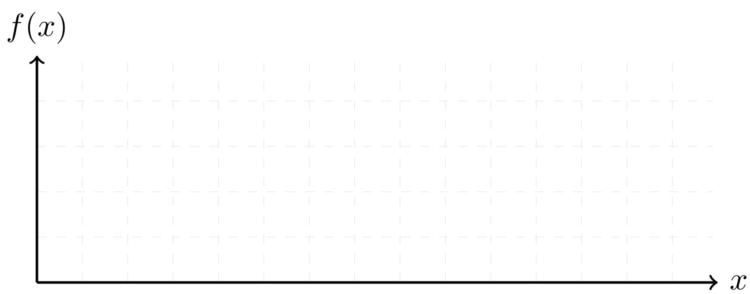
Beispiel

Es sei $f(x) = e^{cx}$ und somit $f'(x) = c \cdot e^{cx}$. Weil e^{cx} stets positiv ist, gilt

(i) Für $c > 0$ ist $f'(x) > 0 : f$ ist auf $\mathbb{R}$ wachsend. Wir werden später sehen, dass wir damit wachsende Prozesse im Zeitablauf modellieren. Häufig wird dann x durch t ersetzt (vom englischen "**t**ime"). Beispiele sind eine wachsende Wirtschaft oder Population, Ausbreitung von Epidemien im Anfangsstadium, Anzahl Zellen bei der Zellteilung.

(ii) Für $c < 0$ ist $f'(x) < 0 : f$ ist auf $\mathbb{R}$ fallend. Mit dieser Funktion modellieren wir später die Abnahme von homogenem radioaktivem Material.





c) Ableitung und konstante Funktionen

Wichtig ist auch der Fall, wo $f'(x) = 0$ ist, für alle x aus dem Intervall I. Von der geometrischen Anschauung her ist es dann einleuchtend, dass f eine konstante Funktion sein muss, denn die Tangente ist überall horizontal. In Zeichen:

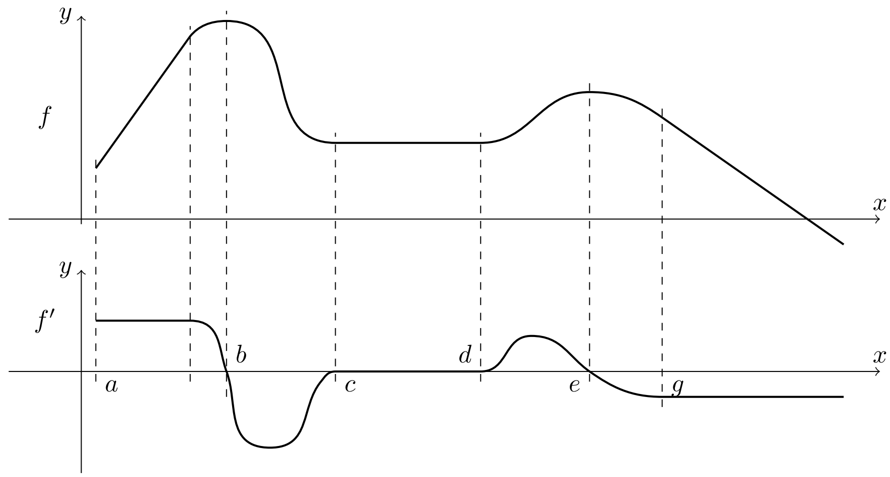
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow f \quad \text{konstant.}$$

Im Gegensatz zu b) (vgl. den dortigen Hinweis mit x^3) gilt hier auch die Umkehrung: Eine der einfachsten Ableitungsregeln (5.3) besagt, dass die Ableitung einer konstanten Funktion immer Null ist. Also haben wir die Regel

$$\boxed{(3) \quad f'(x) = 0 \ \text{ für alle } \ x \in I \Longleftrightarrow f \ \text{ konstant.}}$$

d) Ein qualitatives Beispiel

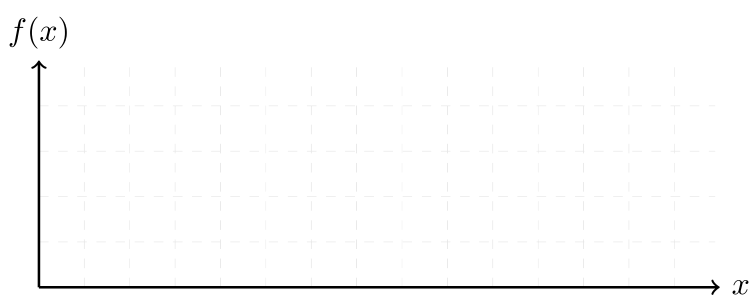
Illustrieren wir das Ganze noch an einem qualitativen Beispiel. Es wird kein Anspruch auf zahlenmässige Genauigkeit erhoben!



Von a nach b steigt die Funktion zuerst gleichförmig, die Ableitung ist also zunächst konstant, wird dann aber im Punkt b gleich 0 (horizontale Tangente!). Hierauf fällt die Funktion bis c und ist von dort an horizontal. Zwischen b und c muss die Ableitung somit negativ sein, zwischen c und d aber gleich 0. Hierauf folgt ein Anstieg von d nach e (positive Ableitung), ein "stationärer Punkt" in e (Ableitung $= 0$) und schliesslich ein Abfall (negative Ableitung), wobei die Ableitung von g an konstant ist (der Graph ist eine fallende Gerade!).

$\boxed{\text{(6.4) Die Bedeutung der zweiten Ableitung}}$

Wir setzen hier nicht nur voraus, dass $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, sondern auch, dass auf I die zweite Ableitung f'' existiert. Da f'' die erste Ableitung von f' ist, können wir die Betrachtungen von (6.3) auf f' und f'' (statt wie dort auf f und f') anwenden. Wenn auf dem ganzen Intervall I die zweite Ableitung $f''(x) < 0$ ist, so fällt $f'(x)$ auf ganz I, d.h., die Steigung von $f(x)$ nimmt (mit wachsendem x) ab - und wird in unterem Bild sogar negativ:

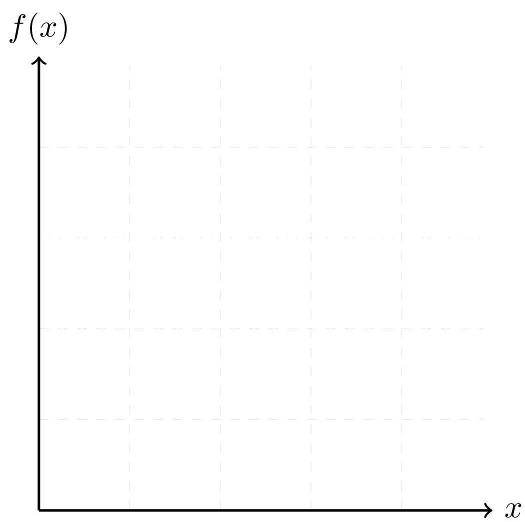


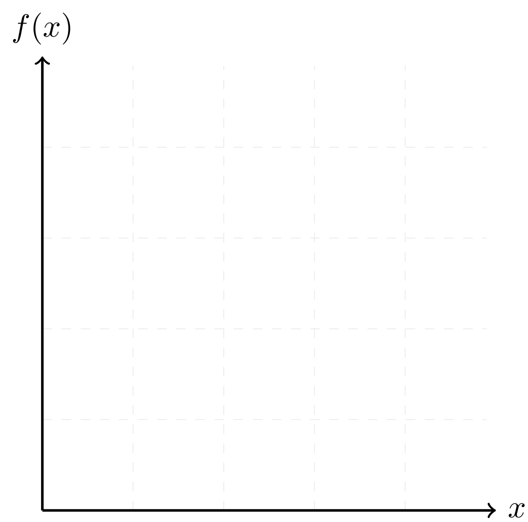
Anschaulich heisst dies, dass der Graph von f eine *Rechtskurve* beschreibt. (Man sagt manchmal auch, f sei konkav nach unten oder konvex nach oben, aber diese Bezeichnungen sind etwas verwirrend.) Ganz entsprechend behandelt man den Fall $f''(x) > 0$. Somit finden wir:

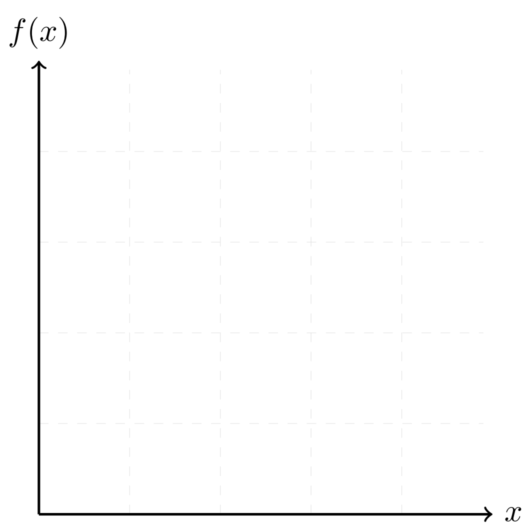
(4) $f''(x) < 0$ auf $I \Longrightarrow$ Der Graph von f beschreibt auf I eine Rechtskurve.

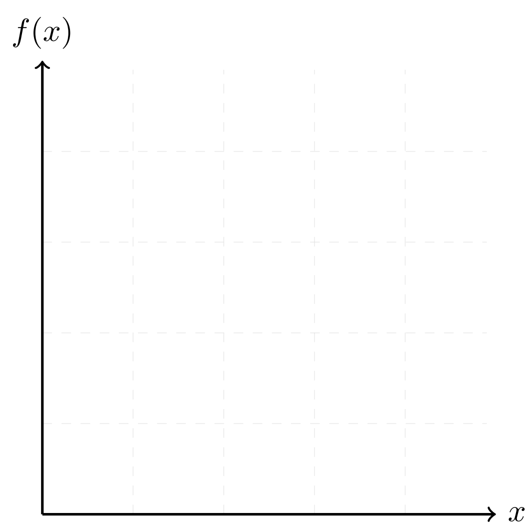
(5) $f''(x) > 0$ auf $I \Longrightarrow$ Der Graph von f beschreibt auf I eine Linkskurve.

In den folgenden Skizzen sind die Beziehungen (4) und (5) mit (1) und (2) zusammengefasst. Sie zeigen die verschiedenen Kombinationen von Wachstums- und Krümmungsverhalten.









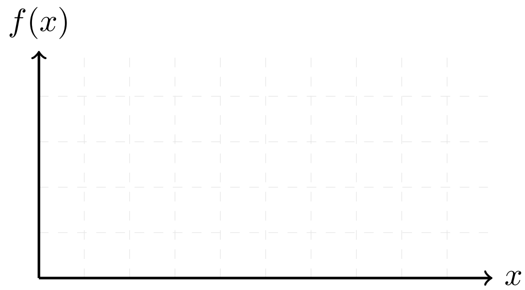
Historisch, Politik: "**The rate of increase of inflation is decreasing.**"

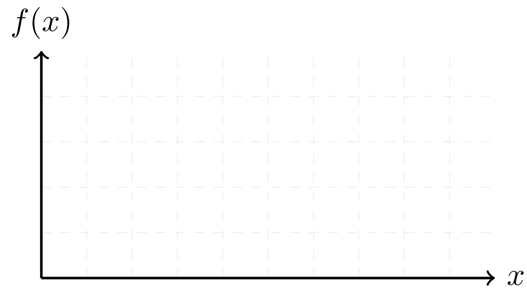
Richard Nixon (1913-1994, US Präsident (1969-1974 (Watergate, Impeachmentdrohung, Rücktritt)); 1972 in einem Interview): "**Nixon and the 3rd derivative**".

Was heisst das überhaupt?

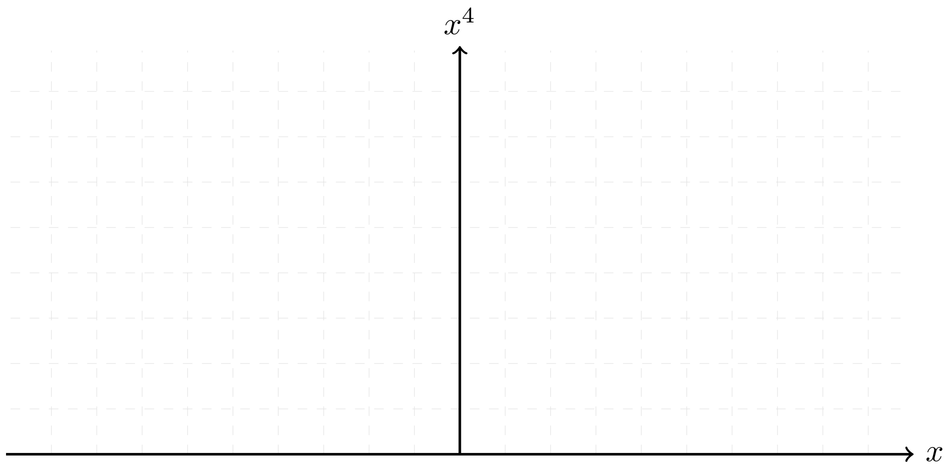
Kurze Didaktiklektion zu obigem: wann entwickelt man etwas in der Klasse versus: wann gibt man es pfannenfertig ab?
https://schweizermonat.ch/richard-nixon-und-die-dritte-ableitung

Von einiger Bedeutung ist schliesslich noch der folgende Begriff: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 von einer Links- zu einer Rechtskurve (oder umgekehrt) übergeht, dann spricht man von einem *Wendepunkt* (engl inflection point). Er ist dadurch charakterisiert, dass $f''(x_0) = 0$ ist und dass f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

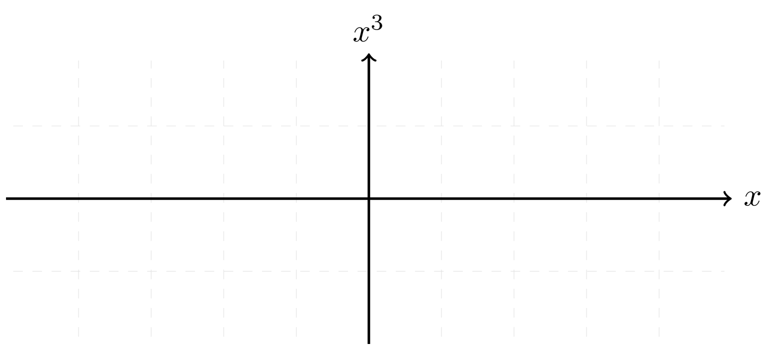




Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ allein genügt nicht für einen Wendepunkt. Nimmt man z.B. $f(x) = x^4$, so ist $f''(0) = 0$, aber es liegt kein Wendepunkt vor, denn f'' wechselt in 0 das Vorzeichen nicht. Der Graph beschreibt durchgehend eine Linkskurve.



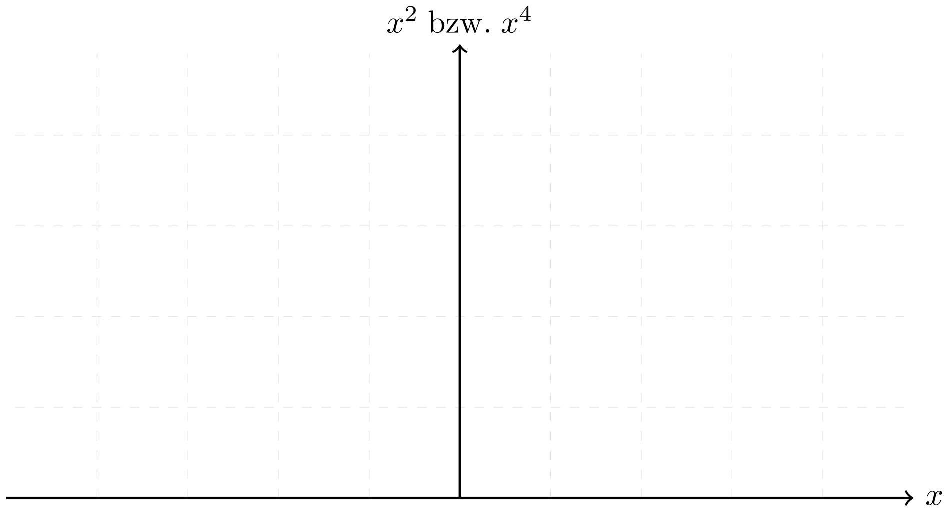
Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente (also zusätzlich mit $f'(x_0) = 0$) heisst *Terrassenpunkt* (engl saddle point). So hat beispielsweise die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle 0 einen solchen Terrassenpunkt.



Wir fassen auch diese beiden Aussagen noch zusammen.

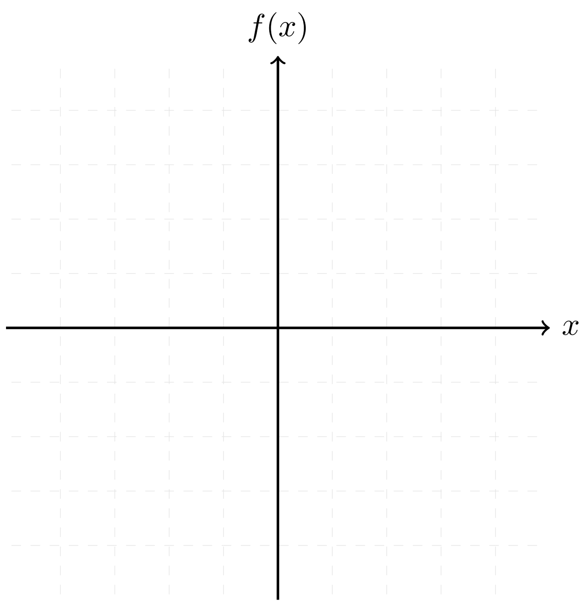
(6)	f hat in x_0 einen Wendepunkt $\Longleftrightarrow$ $f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen.
(7)	f hat in x_0 einen Terrassenpunkt $\Longleftrightarrow$ $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen.

Nebenbemerkung: x^2 vs x^4:



Beispiel

Analysieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Hinblick auf die Resultate in (6.3) und (6.4):



(6.5) Extrema

a) Einleitung

Eine sehr bekannte Anwendung der Differentialrechnung ist die Lösung von Extremalaufgaben (das Auffinden von Maxima und Minima einer Funktion). Das Vorgehen ist Ihnen vom Gymnasialunterricht her vertraut: Man setzt die erste Ableitung gleich Null und prüft allenfalls mit der zweiten Ableitung nach, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. Dieses einfache Rezept wollen wir hier etwas genauer ansehen. Zuerst präzisieren wir den Begriff des Extremums.

b) Absolute und relative Extrema (oder "globale" bzw "lokale" Extrema)

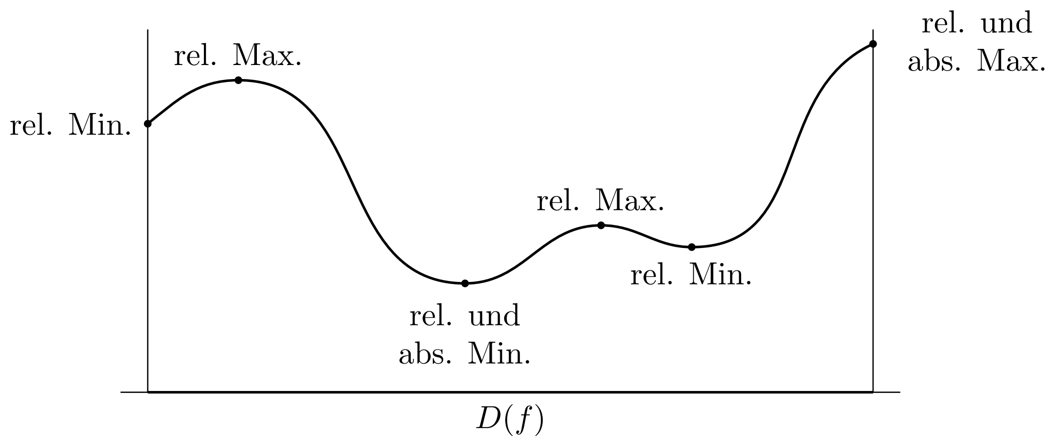
Es sei f eine auf einem gewissen Definitionsbereich $D(f)$ gegebene Funktion. Unter dem *absoluten Maximum* von f (auf $D(f)$) versteht man den grössten Funktionswert in bezug auf den gegebenen Definitionsbereich. Das *absolute Minimum* ist natürlich entsprechend definiert. Maxima und Minima fasst man unter dem Begriff *Extrema* zusammen. Etwas formeller:

Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe ein *absolutes Maximum* an der Stelle x_0 oder $f(x_0)$ sei ein absolutes Maximum von f, wenn gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D(f) \ .$$

Das *absolute Minimum* wird entsprechend definiert (ersetze $\geq$ durch $\leq$).

Neben den absoluten Extrema sind auch die relativen Extrema von Bedeutung. Die folgende Skizze erläutert die Begriffe anschaulich.

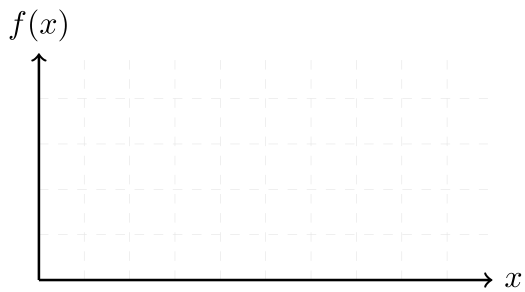


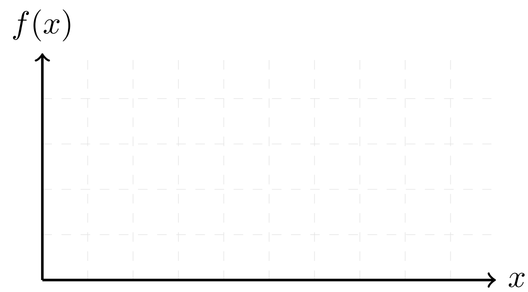
Um auch hier eine exakte Definition geben zu können, ist es zweckmässig, die Redewendung “in der Nähe von x_0” durch den Begriff der ε–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ des Punktes x_0 zu ersetzen (vgl. (6.2.b)). Die präzise Formulierung lautet dann so:

Die Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in D(f)$ ein *relatives Maximum*, wenn es eine ε–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x_0) \ .$$

Das *relative Minimum* wird entsprechend definiert.

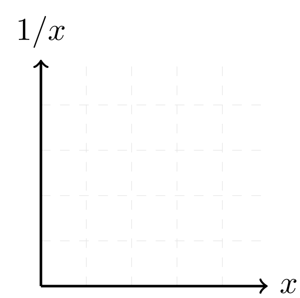




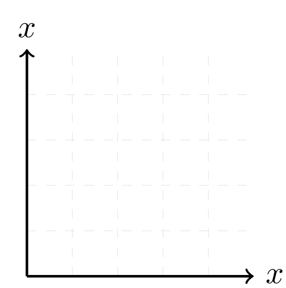
c) <u>Zur Existenz von Extrema</u>

Man ist oft daran interessiert, die Extrema (vor allem die absoluten Extrema) einer gegebenen Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ aufzusuchen. Es kann dabei durchaus geschehen, dass man nicht fündig wird, denn eine Funktion braucht nicht unbedingt Extrema zu haben, wir analysieren dazu die folgenden Beispiele:

1) $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}\,.$



2) $f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,.$



d) Wie findet man die Extremalstellen?

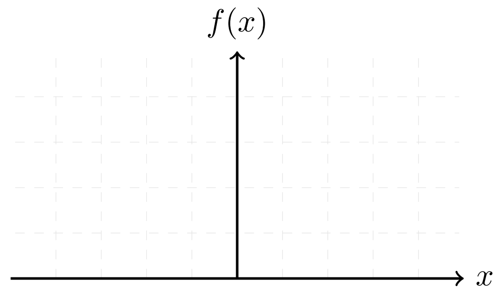
Bitte lesen Sie diese Stellen im Buch mit allen Details genau durch; wir besprechen in der Vorlesung lediglich kurz die Theorie und üben das Repetierte gleich anhand von Beispielen.

- absolutes Maximum ist stets auch ein relatives Maximum, suchen also einfach alle relativen Maxima - analog Minima
- Aus $f'(x_0) = 0$ darf nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass f in x_0 ein relatives Extremum hat
- Es kann auch Extremalstellen geben, in welchen die Ableitung nicht Null ist

- *mögliche* Kandidaten für relative Extremalstellen:

(i) Randpunkte - **mühsam, wird oft vergessen!**

Wenn der Definitionsbereich $D(f)$ ein halboffenes oder abgeschlossenes Intervall ist, dann hat er Randpunkte. Es kann vorkommen, dass die Funktion ausgerechnet in den Randpunkten ein absolutes oder relatives Extremum hat:



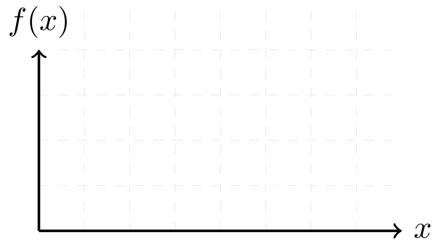
Diese Randpunkte werden mit den Methoden der Differentialrechnung im allgemeinen nicht erfasst (die Ableitung der Funktion f ist in einem Randpunkt i.a. nicht gleich Null), so dass sie, falls vorhanden, stets separat zu berücksichtigen sind.

(ii) Innere Punkte, in denen f differenzierbar ist - **der schöne Fall**

Nachdem die Randpunkte besprochen sind, betrachten wir nun einen inneren Punkt x_0 des Definitionsbereichs $D(f)$ und setzen auch noch voraus, dass f in x_0 differenzierbar sei. Dann gilt:

> Es sei x_0 ein innerer Punkt von $D(f)$ und f sei in x_0 differenzierbar. Wenn f an der Stelle x_0 ein relatives Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

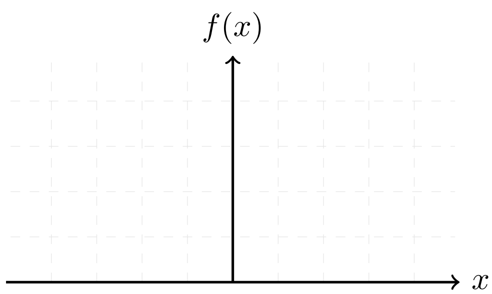
Dieses Ergebnis ist anschaulich klar: Wenn z.B. ein relatives Maximum vorliegt, dann steigt die Tangente links von x_0 und sie fällt rechts von dieser Stelle. Die (nach Voraussetzung existierende) Tangente in x_0 muss deshalb horizontal sein: Es ist $f'(x_0) = 0$.

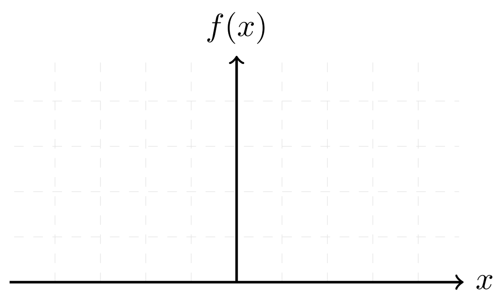


Obwohl wir in f) darauf zurückkommen werden, sei jetzt schon betont, dass die Umkehrung der obigen Tatsache nicht gilt: Aus $f'(x_0) = 0$ braucht noch nicht zu folgen, dass f in x_0 ein relatives Extremum hat.

(iii) Innere Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist - **das merkt man!**

Wenn f in x_0 nicht differenzierbar ist, so ist die Bedingung $f'(x_0) = 0$ sinnlos. Es kann aber vorkommen, dass ein Extremum gerade dort auftritt, wo f nicht differenzierbar ist. So hat die Funktion $f(x) = |x|$ ihr relatives (und absolutes) Minimum an der Stelle $x = 0$, wo sie nicht differenzierbar ist! Ohne Anspruch auf Vollständigkeit ist dann Vorsicht geboten, wenn Absolutbeträge in Funktionen vorkommen oder die Funktion auf verschiedenen Intervallen verschiedenen Gesetzen folgt (Schreibweise mit geschweifter Klammer).





e) Zusammenfassung

Die oben gemachten Überlegungen lassen sich (in geänderter Reihenfolge) wie folgt zusammenfassen:

Ein *relatives Extremum* (wenn es überhaupt existiert) muss an einer der folgenden Stellen auftreten:

1. Innere Punkte x_0 des Definitionsbereichs mit $f'(x_0) = 0$,
2. Randpunkte des Definitionsbereichs (falls vorhanden),
3. Stellen, wo f nicht differenzierbar ist (falls vorhanden).

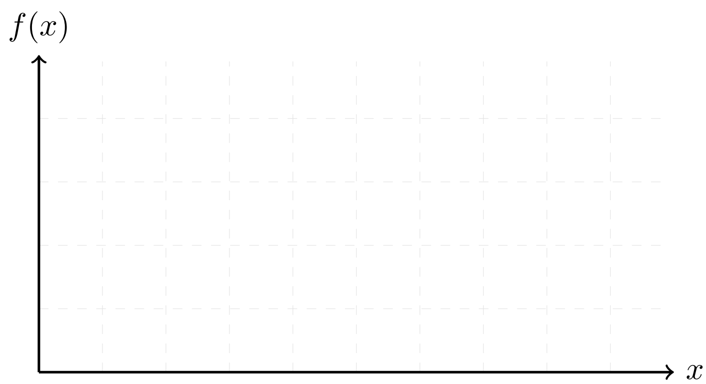
Die absoluten Extrema (falls sie existieren) findet man unter den relativen Extrema. Das grösste relative Maximum ist dann das absolute Maximum, das kleinste relative Minimum ist das absolute Minimum.

f) Charakterisierung der Extrema

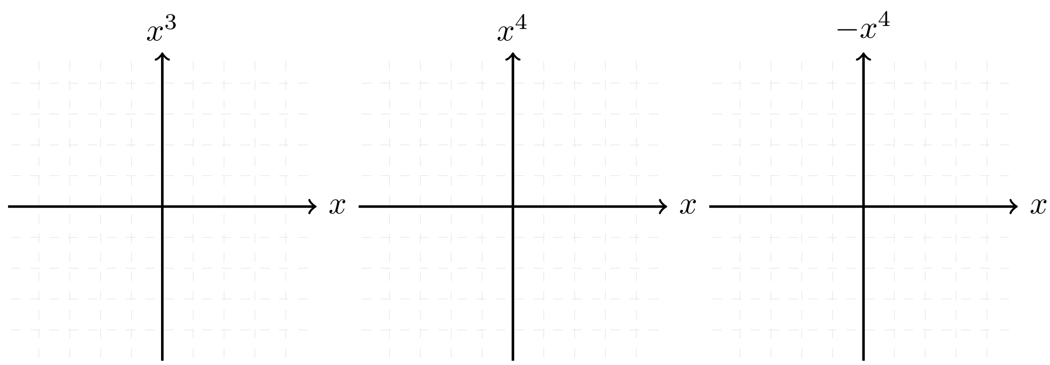
Wenn die Funktion f zweimal differenzierbar ist, so kann das folgende Kriterium helfen:

> Sei x_0 eine Stelle mit $f'(x_0) = 0$.
> - Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein relatives Maximum.
> - Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein relatives Minimum. Poetischer: Die Mitte der Nacht (Tiefpunkt) ist immer auch der Beginn eines neuen Tages (es geht wieder aufwärts, wird besser: $f'' > 0$).

Die oben genannten Regeln werden plausibel, wenn man an die Betrachtungen in (6.4) denkt: Eine negative zweite Ableitung bedeutet eine Rechtskurve, also eine nach unten geöffnete Kurve, was einem Maximum entspricht. Analog funktioniert der Fall einer positiven zweiten Ableitung.



Wenn aber $f''(x_0) = 0$ ist, so kann man nichts aussagen, und es müssen andere Überlegungen gemacht werden (Buch p 93), wie die folgenden Beispiele zeigen: In den nachstehenden Fällen ist jedesmal $f'(0) = 0, f''(0) = 0$.



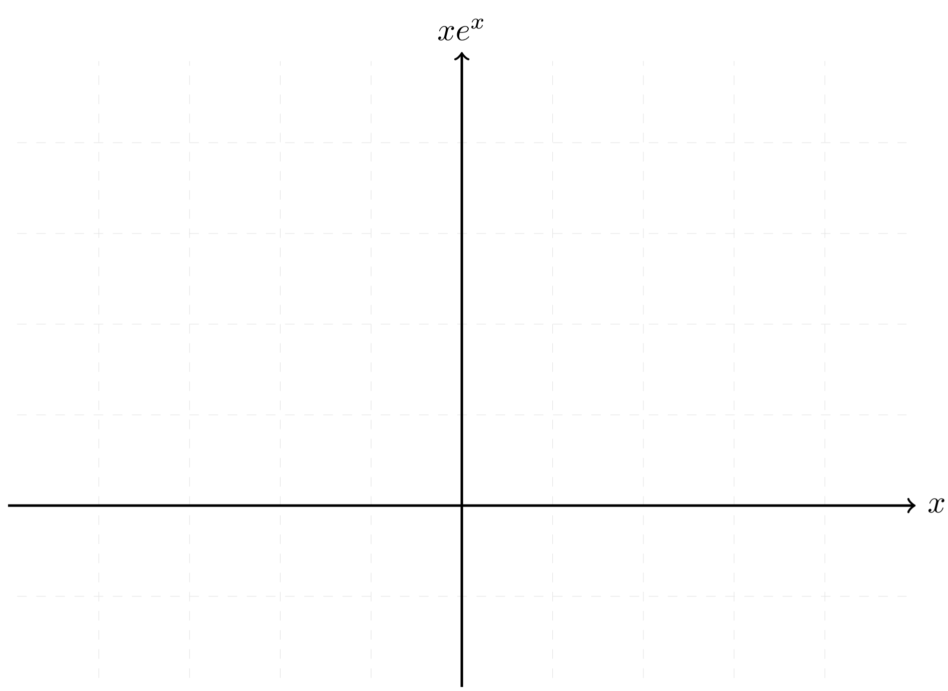
Wir halten noch fest: es braucht nur 2 Funktionen, die Sie memorieren müssen, um alle Kontrastbeispiele zu kennen: x^3 ($f'(0) = 0$ aber trotzdem auf ganz $\mathbb{R}$ (sogar streng monoton) wachsend und kein Extremum sondern nur Terassenpunkt) und x^4 ($f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, kein Wendepunkt, sondern Minimum).

(6.6) Beispiele zur Bestimmung von Extrema

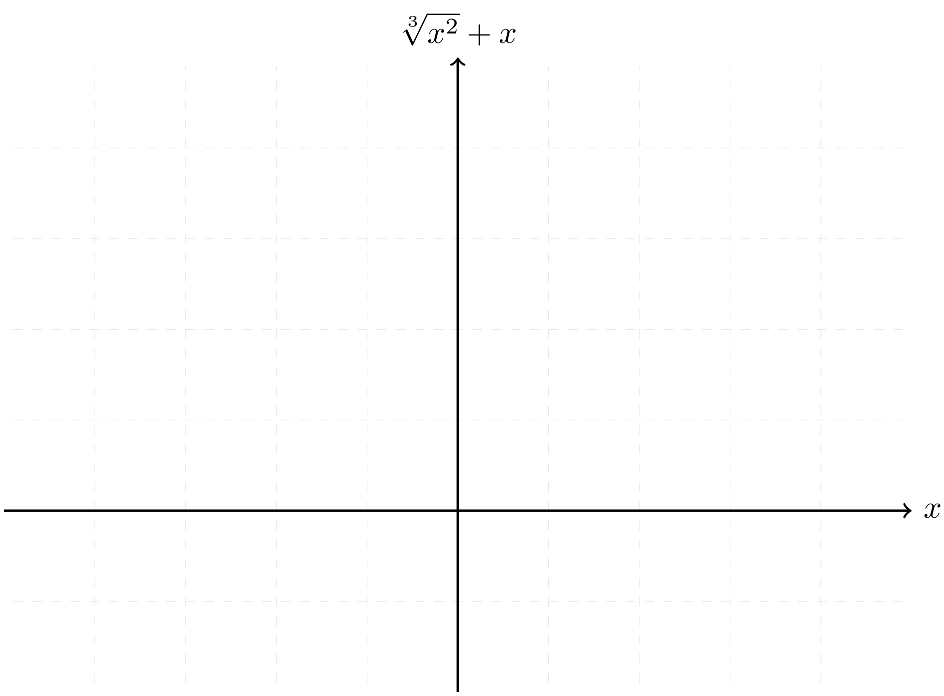
Beispiel 1: $f(x) = xe^x$

a) auf $[0, 1]$

b) auf $[-2, 0]$



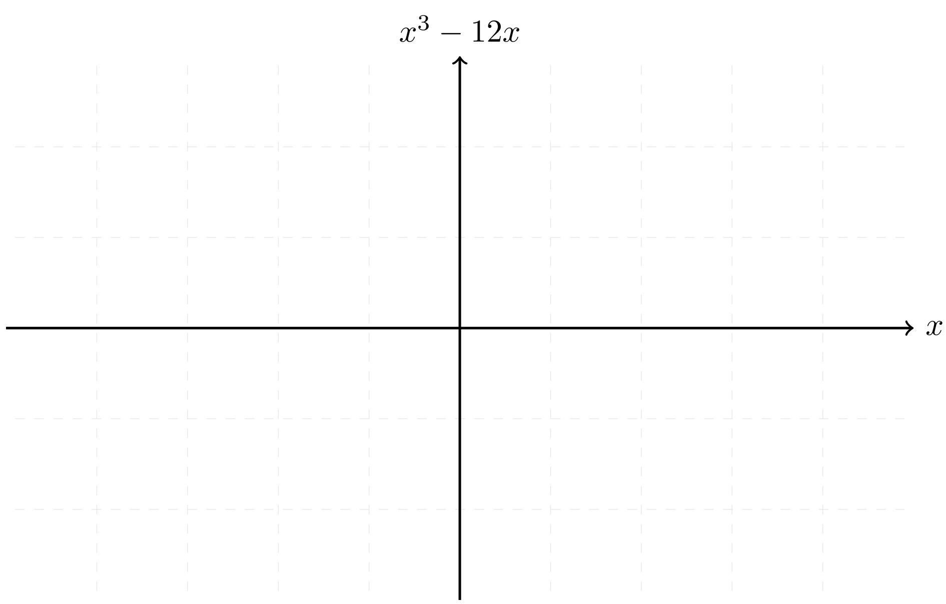
Beispiel 2: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x$ auf $[-0.5, 1]$



Eigenes Beispiel: Haag für Hamster im Garten; maximiere Fläche F bei gegebenem Umfang u (zB 20 Meter), wenn es ein Rechteck sein muss.

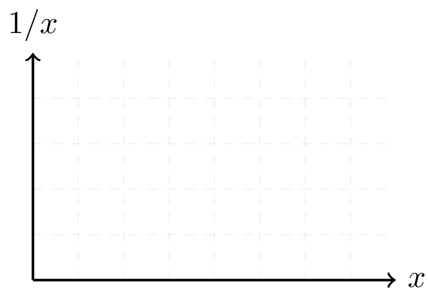
https://schweizermonat.ch/der-optimale-gartenhag

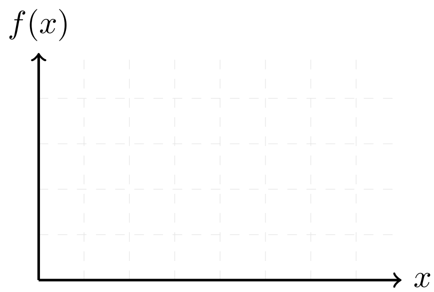
Aufgabe 6-5 a): $f(x) = x^3 - 12x$ auf $[-3, 3]$

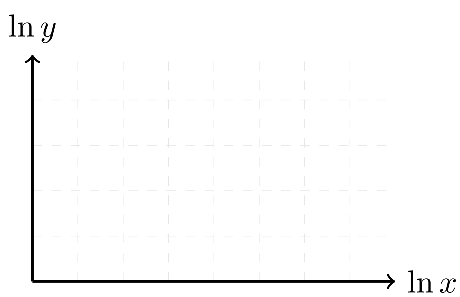


(6.7) Graphische Darstellung von Funktionen

Bitte lesen Sie im Anschluss an diese Stunde (6.7) im Buch durch; hier ist kompakt zusammengefasst, was man bei Funktionen alles untersuchen kann. Zudem sind die Graphen der wichtigsten Funktionen gezeichnet - hier eine kleine Hilfe http://www.luchsinger-mathematics.ch/BeautifulDanceMoves.jpg . Eine kleine Bemerkung aus der Praxis:







Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

In 3Blue1Brown
www.3blue1brown.com/lessons/higher-order-derivatives

(1) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f$ ist auf I *wachsend*.
(2) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f$ ist auf I *fallend*. *(6.3)*
(3) $f'(x) = 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f$ ist auf I *konstant*.
(4) $f''(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow$ Der Graph von f beschreibt eine *Rechtskurve*. *(6.4)*
(5) $f''(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow$ Der Graph von f beschreibt eine *Linkskurve*.
(6) f hat in x_0 einen Wendepunkt $\Longleftrightarrow f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen.
(7) f hat in x_0 einen Terrassenpunkt $\Longleftrightarrow f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen.

Absolute Extrema einer Funktion bestimmt man, indem man *relative Extrema* aufsucht und vergleicht. Diese letzteren findet man durch Untersuchung der folgenden Kandidaten:

1. Innere Punkte x_0 des Definitionsbereichs mit $f'(x_0) = 0$.
2. Randpunkte des Definitionsbereichs. *(6.5.e)*
3. Stellen, wo f nicht differenzierbar ist.

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, so liefert die *zweite Ableitung* eine Entscheidungshilfe für die Art des Extremums:

- Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein relatives Maximum. *(6.5.f)*
- Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein relatives Minimum.

Merke x^3 und x^4 als Gegenbeispiele, weil:

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrere Antworten möglich)
$(2,5) = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 5\}$ ist ein offenes Intervall.
$[2,5) = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 5\}$ ist ein halboffenes Intervall.
$(2,5] = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 5\}$ ist ein halboffenes Intervall.
$[2,5] = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 5\}$ ist ein offenes Intervall.

Frage 2: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrere Antworten möglich)
f ist streng monoton wachsend
f ist streng monoton fallend

f ist monoton
Keine der Antworten ist richtig

Frage 3: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrere Antworten möglich)
f ist streng monoton wachsend
f ist streng monoton fallend
f ist monoton
Keine der Antworten ist richtig

Frage 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrere Antworten möglich)
f ist streng monoton wachsend
f ist streng monoton fallend
f ist monoton
Keine der Antworten ist richtig

Frage 5: Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrere Antworten möglich)
f ist streng monoton wachsend
f ist streng monoton fallend
f ist monoton
Keine der Antworten ist richtig

Frage 6: Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Mehrere Antworten möglich)
f ist auf $I = [-10, -1]$ wachsend
f ist auf $I = [-10, -1]$ fallend
f ist auf $I = [-10, -1]$ monoton
Keine der Antworten ist richtig

Frage 7: Wir betrachten wieder die Funktion $f(x) = x^2$ auf $I = [-10, -1]$. Es gilt $f'(x) < 0$ in I. Wahr oder Falsch

Frage 8: Wir betrachten die Funktion $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wahr oder Falsch

Frage 9: Wir betrachten $f(x) = x^2$ Diese Funktion beschreibt auf $\mathbb{R}$ eine Linkskurve. Wahr oder Falsch

Frage 10: e^x beschreibt auf $\mathbb{R}$ eine Linkskurve. Wahr oder Falsch

Frage 11: Wenn der Graph einer Funktion f von einer Links- zu einer Rechtskurve (oder umgekehrt) übergeht, dann spricht man von einem Wendepunkt. Wahr oder Falsch

Frage 12: Wenn f bei x_0 einen Wendepunkt hat, dann ist $f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen. Wahr oder Falsch

Frage 13: Sei $f(x) = -x^2 + 2$. Dann ist $f(0) = 2$ der grösste Wert von f auf ganz $\mathbb{R}$ und man sagt, f habe ein absolutes Maximum an der Stelle 0. Wahr oder Falsch

Frage 14: Sei $f(x) = x$. Sei $I = [1, 2]$. Dann ist 2 ein absolutes Maximum und 1 ein absolutes Minimum von f in I. Wahr oder Falsch

Frage 15: Welche der folgenden Funktionen haben ein absolutes Extrema?
- $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
- $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$
- $f : [5, 10] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$

Frage 16: Welche der folgenden Funktionen haben ein absolutes Extrema?
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$
- $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$
- $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$

Frage 17: $f : (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ hat keine Exremstellen. Wahr oder Falsch

Frage 18: Ein relatives Extrema, wenn es existiert, muss an einer der folgenden Stellen auftreten: Innerer Punkt des Definitionsbereichs mit $f'(x) = 0$, Randpunkt des Definitionsbereichs (falls vorhanden), Stelle, wo f nicht differenzierbar ist (falls vorhanden). Wahr oder Falsch

Frage 19: Ein absolutes Extrema muss an einem der relativen Extrema sein. Wahr oder Falsch

Frage 20: Sei f eine Funktion mit $f'(5) = 0$. Wir leiten nochmal ab und erhalten $f''(5) = 19$. Somit hat f bei $x = 5$ ein relatives Minimum. Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen: Frage 1: Alle Antworten sind richtig; Frage 2: Keine der Antworten ist richtig. Wenn $x < 0$, dann ist f streng monoton fallend und wenn $x > 0$, dann ist f streng monoton wachsend. Somit stimmt keine Antwort auf ganz $\mathbb{R}$; Frage 3: f ist streng monoton wachsend und f ist monoton, da f monoton wachsend ist; Frage 4: f ist streng monoton fallend und f ist monoton, da f monoton fallend ist; Frage 5: f ist monoton, da für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ falls $x_1 < x_2$; Frage 6: f ist auf $I = [-10, -1]$ fallend, f ist auf $I = [-10, -1]$ monoton. Wir beachten nur den Bereich $I = [-10, -1]$, und in diesem ist f streng monoton fallend; Frage 7: Wahr. f ist fallend auf I, somit ist die Ableitung negativ; Frage 8: Wahr. f ist fallend auf I, somit ist die Ableitung negativ; Frage 9: Wahr. Wir betrachten die zweite Ableitung: $f''(x) = (x^2)'' = (2x)' = 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit beschreibt f eine Linkskurve; Frage 10: Wahr. $f''(x) = (e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit beschreibt f eine Linkskurve; Frage 11: Wahr; Frage 12: Wahr; Frage 13: Wahr; Frage 14: Wahr. Im Intervall I nimmt f keinen grösseren Wert als 2, und keinen kleineren Wert als 1 an; Frage 15: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ hat kein absolutes Extrema. $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ hat ein absolutes Maximum bei 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$ hat ein absolutes Minimum bei 0. $f : [5, 10] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$ hat ein absolutes Minimum bei 5 und ein absolutes Maximum bei 10; Frage 16: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ hat kein absolutes Extrema. $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ hat ein absolutes Minimum bei -2 und ein absolutes Maximum bei 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ hat gemss Definition im Skript immer bei $(\pi/2) + 2k\pi$ ein Maximum und bei $(3\pi/2) + 2k\pi$ ein Minimum, wo $k \in \mathbb{R}$. $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ hat bei $\pi/2$ ein absolutes Maximum und bei $3\pi/2$ ein absolutes Minimum; Frage 17: Wahr. $(0, \pi)$ ist ein offenes Intervall; Frage 18: Wahr. Diese Checkliste ist nützlich um die relativen Extrema zu finden; Frage 19: Wahr. Um ein absolutes Extrema zu finden sucht man alle relativen, und ermittelt den grössten, bzw. den kleinsten Wert; Frage 20: Wahr. Bei $f'(x_0) = 0$ gilt für: $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist ein relatives Maximum, $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist ein relatives Minimum. .