5. TECHNIK DES DIFFERENZIERENS

(5.2) Die Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung	Bezeichnung
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	Summenregel
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$	Differenzenregel
$cf(x)$	$cf'(x)$	Regel vom konstanten Faktor ($c \in \mathbb{R}$)
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Produktregel "Symmetrie"
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	Quotientenregel "N(AZ)-Z(AN)"
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel "äussere mal innere"

(5.3) Die Ableitung der wichtigsten Funktionen

Funktion $y = f(x)$	Ableitung $y' = f'(x)$	Bemerkungen
$c = \text{const}$	0	
x^n	nx^{n-1}	Gilt für alle $n \in \mathbb{R}$, falls $x > 0$. Gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und beliebige x (für $n < 0$ muss jedoch $x \neq 0$ sein).
x	1	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x > 0,\ a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

Kontrollrechnungen und Bilder:

Kontrollrechnungen und Bilder - Fortsetzung:

(5.4) Beispiele

1. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 2.$

2. $G(t) = \dfrac{2}{t^2} + \sqrt[3]{t} - \dfrac{3}{\sqrt[4]{t^3}},\ (t > 0).$

3. $\Phi(z) = z \ln z, \ (z > 0)$.

4.1 Vorbereitung auf 4.2: $\frac{1}{x}$ ableiten mit der Quotientenregel...

4.2 $A(\alpha) = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

(5.5) Näheres zur Kettenregel (englisch: chain rule)

a) <u>Zusammengesetzte Funktionen (englisch: composition of two or more functions)</u>

Nun definieren wir allgemein, was wir unter der Zusammensetzung von zwei Funktionen verstehen:

Es seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dabei sei $D(g)$ so gewählt, dass $y = g(x) \in D(f)$ ist, für alle $x \in D(g)$.
Dann lässt sich für jedes $x \in D(g)$ die Zahl

$$f(g(x)) \quad (\text{oder} \quad f(y) \quad \text{mit} \quad y = g(x))$$

bilden. Die so erhaltene Funktion

$$h : D(g) \to \mathbb{R},\ h(x) = f(g(x))$$

heisst die *Zusammensetzung* (oder *Komposition* oder *Verkettung*) von g und f. In Zeichen:

$$h = f \circ g\ .$$

Wir nennen g die *innere*, f die *äussere* Funktion (englisch: inner and outer function).

<u>Beispiel 3</u>

Die Funktion

$$h(x) = e^{x^2}$$

ist zusammengesetzt aus $y = g(x) = x^2$ und $f(y) = e^y$:

$$h(x) = f(g(x)) = e^{x^2}\ .$$

Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. ⊠

<u>Beispiel 4</u>

Die Funktion

$$k(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

ist zusammengesetzt aus $y = g(x) = x^2 - 1$ und $f(y) = \sqrt{y}$:

$$k(x) = f(g(x)) = f(y) = \sqrt{x^2 - 1}\ .$$

Sie ist für alle x definiert, für welche $x^2 - 1 \geq 0$ ist, d.h. für alle x mit $|x| \geq 1$. ⊠

<u>Beispiel 5</u>

Selbstverständlich lassen sich auch mehr als zwei Funktionen zusammensetzen. So ist etwa

$$p(x) = \sin(\ln(x^2 + 1))$$

von der Form $p(x) = f(g(h(x)))$ mit $f(z) = \sin z$, $g(y) = \ln y$ und $h(x) = x^2 + 1$. ⊠

b) <u>Anwendung der Kettenregel</u>

Diese Regel sagt aus, wie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $f \circ g$, also der Funktion $x \mapsto f(g(x))$, zu bilden ist. Die Formel lautet (vgl. (5.2)):

$$\boxed{f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

oder in Worten:

> Man nimmt die Ableitung der Funktion f an der Stelle $y = g(x)$ und multipliziert diese mit der Ableitung von g an der Stelle x.

Man nennt $f'(y) = f'(g(x))$ die *äussere*, $g'(x)$ die *innere Ableitung*. Die Regel lautet dann kurz:

Äussere Ableitung mal innere Ableitung.

(Vorausgesetzt natürlich, dass sowohl $f'(g(x))$ wie auch $g'(x)$ überhaupt existieren. Für die genaue Formulierung vergleiche man den Beweis in (27.3).)

Englisch: outer derivative times the inner derivative.

Beispiele 6-10

Beispiele 6-10 Fortsetzung

Vor Beispielen 11 -12, **Gesetze des Logarithmus und der Exponentialfunktion**:

Vor Beispielen 11 -12, **Gesetze des Logarithmus und der Exponentialfunktion**: Fortsetzung I

Vor Beispielen 11 -12, **Gesetze des Logarithmus und der Exponentialfunktion**: Fortsetzung II

Beispiel 11

Beispiel 12

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.