

Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I - Analysis" von Christoph Luchsinger und Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. Das Copyright ist bei Birkhäuser!

5. TECHNIK DES DIFFERENZIERENS

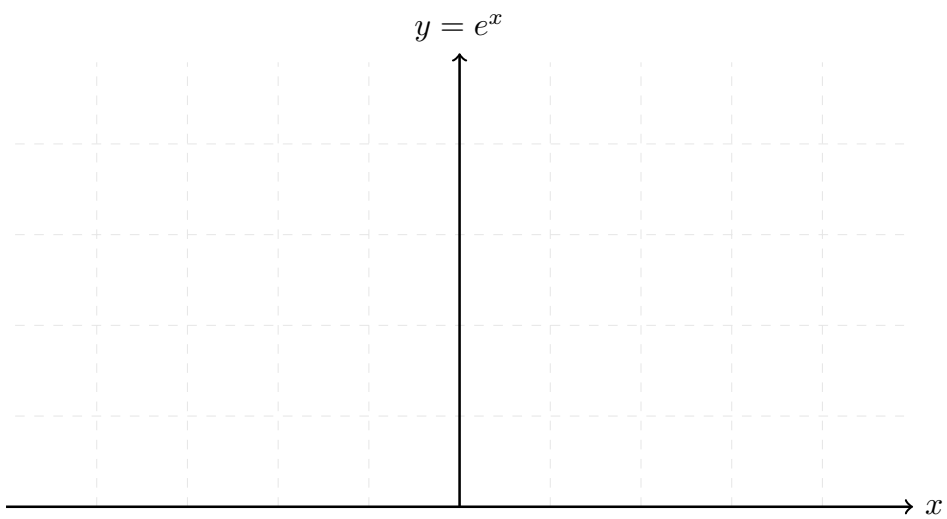
(5.2) Die Ableitungsregeln

Funktion	Ableitung	Bezeichnung
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	Summenregel
$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$	Differenzenregel
$cf(x)$	$cf'(x)$	Regel vom konstanten Faktor ($c \in \mathbb{R}$)
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Produktregel "Symmetrie"
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	Quotientenregel "N(AZ)-Z(AN)"
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel "äussere mal innere"

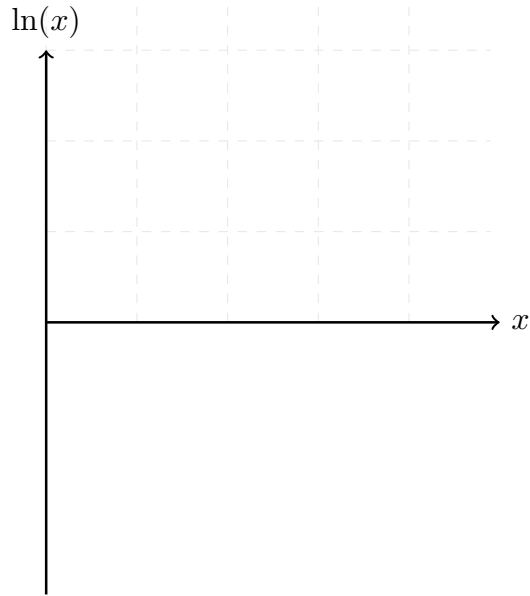
(5.3) Die Ableitung der wichtigsten Funktionen

Funktion $y = f(x)$	Ableitung $y' = f'(x)$	Bemerkungen
$c = \text{const}$	0	
x^n	nx^{n-1}	Gilt für alle $n \in \mathbb{R}$, falls $x > 0$. Gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und beliebige x (für $n < 0$ muss jedoch $x \neq 0$ sein).
x $\frac{1}{x}$ \sqrt{x}	1 $-\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \neq 0$ $x > 0$
e^x a^x	e^x $a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\ln x$ $\log_a x$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x > 0$ $x > 0, a > 0$
$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$ $\cot x$	$\cos x$ $-\sin x$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$\arcsin x$ $\arctan x$ $\arccos x$ $\text{arccot } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{1+x^2}$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\frac{1}{1+x^2}$	$ x < 1$ $ x < 1$

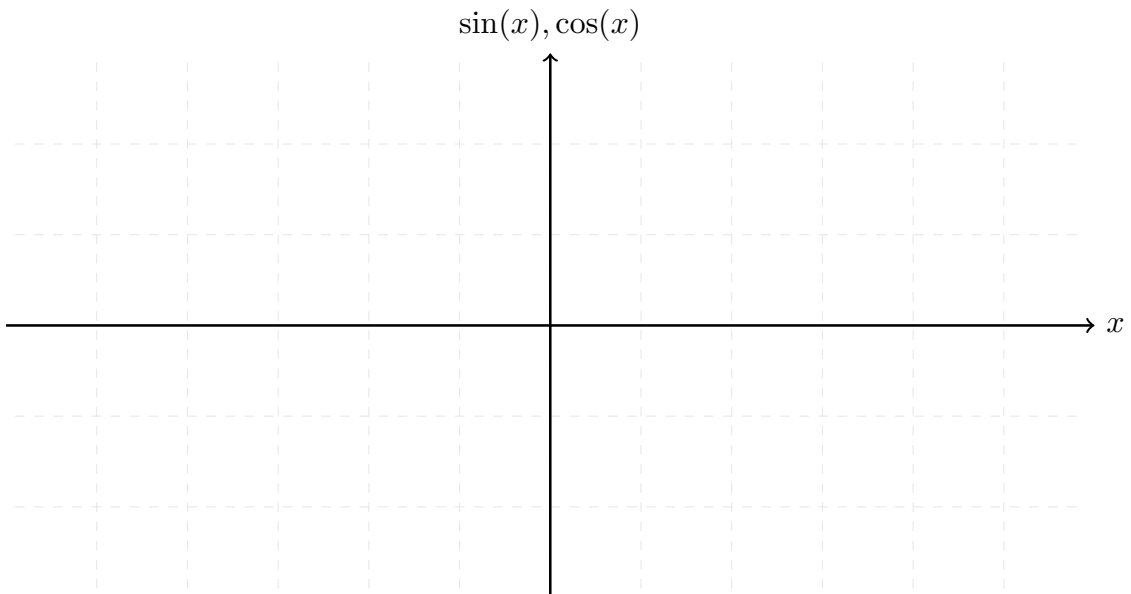
Kontrollrechnungen und Bilder:



Kontrollrechnungen und Bilder - Fortsetzung:



$$(\sin(x))' =$$
$$(\cos(x))' =$$



(5.4) Beispiele

1. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 2.$

2. $G(t) = \frac{2}{t^2} + \sqrt[3]{t} - \frac{3}{\sqrt[4]{t^3}}, (t > 0).$

3. $\Phi(z) = z \ln z, (z > 0).$

4.1 Vorbereitung auf 4.2: $\frac{1}{x}$ ableiten mit der Quotientenregel...

4.2 $A(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} .$

Merke, nicht nur hier: Nenner nie ausmultiplizieren! Hier zB wegen $g(x)^2$ im Nenner!
Üben, üben, üben. Seite 78 im Buch haben Sie massenweise Übungen dazu.

(5.5) Näheres zur Kettenregel (englisch: chain rule)

a) Zusammengesetzte Funktionen (englisch: composition of two or more functions)

Nun definieren wir allgemein, was wir unter der Zusammensetzung von zwei Funktionen verstehen:

Es seien $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dabei sei $D(g)$ so gewählt, dass $y = g(x) \in D(f)$ ist, für alle $x \in D(g)$.

Dann lässt sich für jedes $x \in D(g)$ die Zahl

$$f(g(x)) \quad (\text{oder } f(y) \quad \text{mit } y = g(x))$$

bilden. Die so erhaltene Funktion

$$h : D(g) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(g(x))$$

heißt die *Zusammensetzung* (oder *Komposition* oder *Verkettung*) von g und f . In Zeichen:

$$h = f \circ g .$$

Wir nennen g die *innere*, f die *äussere* Funktion (englisch: inner and outer function).

Beispiel 3

Die Funktion

$$h(x) = e^{x^2}$$

ist zusammengesetzt aus $y = g(x) = x^2$ und $f(y) = e^y$:

$$h(x) = f(g(x)) = e^{x^2} .$$

Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. ☒Beispiel 4

Die Funktion

$$k(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

ist zusammengesetzt aus $y = g(x) = x^2 - 1$ und $f(y) = \sqrt{y}$:

$$k(x) = f(g(x)) = f(y) = \sqrt{x^2 - 1} .$$

Sie ist für alle x definiert, für welche $x^2 - 1 \geq 0$ ist, d.h. für alle x mit $|x| \geq 1$. ☒Beispiel 5

Selbstverständlich lassen sich auch mehr als zwei Funktionen zusammensetzen. So ist etwa

$$p(x) = \sin(\ln(x^2 + 1))$$

von der Form $p(x) = f(g(h(x)))$ mit $f(z) = \sin z$, $g(y) = \ln y$ und $h(x) = x^2 + 1$. ☒b) Anwendung der KettenregelDiese Regel sagt aus, wie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $f \circ g$, also der Funktion $x \mapsto f(g(x))$, zu bilden ist. Die Formel lautet (vgl. (5.2)):

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

oder in Worten:

Man nimmt die Ableitung der Funktion f an der Stelle $y = g(x)$ und multipliziert diese mit der Ableitung von g an der Stelle x .Man nennt $f'(y) = f'(g(x))$ die *äussere*, $g'(x)$ die *innere Ableitung*. Die Regel lautet dann kurz:

Äussere Ableitung mal innere Ableitung.

(Vorausgesetzt natürlich, dass sowohl $f'(g(x))$ wie auch $g'(x)$ überhaupt existieren. Für die genaue Formulierung vergleiche man den Beweis in (27.3).)

Englisch: outer derivative times the inner derivative.

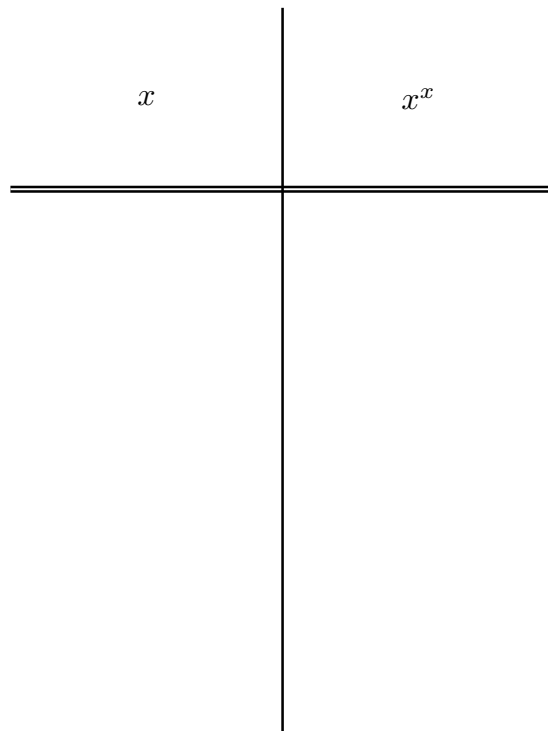
Beispiele 6-10

Beispiele 6-10 Fortsetzung

Vor Beispielen 11 -12, **Gesetze des Logarithmus und der Exponentialfunktion:**

Vor Beispielen 11 -12, **Gesetze des Logarithmus und der Exponentialfunktion:**
Fortsetzung I

Vor Beispielen 11 -12, **Gesetze des Logarithmus und der Exponentialfunktion:**
Fortsetzung II



Beispiel 11

Beispiel 12

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

In 3Blue1Brown

www.3blue1brown.com/lessons/derivatives-trig-functionswww.3blue1brown.com/lessons/chain-rule-and-product-rulewww.3blue1brown.com/lessons/eulers-number

Ableitungsregeln, unter anderem:

Funktion	Ableitung	Bezeichnung
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Produktregel "Symmetrie"
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	Quotientenregel "N(AZ)-Z(AN)"
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel "äussere mal innere"

Nenner nie ausmultiplizieren! ZB $g(x)^2$ im Nenner bei Quotientenregel!

Konkrete Ableitungen, unter anderem:

Funktion $y = f(x)$	Ableitung $y' = f'(x)$	Bemerkungen
x^n	nx^{n-1}	Gilt für alle $n \in \mathbb{R}$, falls $x > 0$. Gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ und beliebige x (für $n < 0$ muss jedoch $x \neq 0$ sein).
x $\frac{1}{x}$ \sqrt{x}	1 $-\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \neq 0$ $x > 0$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$ $\cos x$	$\cos x$ $-\sin x$	

Logarithmenregeln benutzen vor Ableitung, zum Beispiel bei

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x).$$

Anstelle von Ketten- **und** Quotientenregel!

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Folgende Regeln gelten beim Ableiten:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(cf(x))' = c'f'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Frage 2: Gibt es eine Funktion, bei der die Ableitung genau die gleiche Funktion ist wie die Ausgangsfunktion? Ja oder Nein

Frage 3: Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (Mehrere Antworten möglich)

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(-\sin(x))' = -\cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(-\cos(x))' = \sin(x)$$

Frage 4: Die Ableitung von $\frac{1}{4}x^3 + 2x$ ist $\frac{1}{2}x^2 + 2$. Wahr oder Falsch

Frage 5: Die Ableitung von $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2x^2}$. Wahr oder Falsch

Frage 6: Die Ableitung von $5x^2 \cdot 2x \cdot 3$ ist $10x \cdot 2$ Wahr oder Falsch

Frage 7: Die Ableitung von $\frac{1}{x}$ ist $\ln(x)$. Wahr oder Falsch

Frage 8: Die Ableitung von $\sin(x) + \frac{1}{2}x^2 + \ln(x)$ ist $\cos(x) + x + \frac{1}{x}$. Wahr oder Falsch

Frage 9: Die Ableitung von $\cos(-4x^2)$ ist $\sin(-4x^2) \cdot 8x$. Wahr oder Falsch

Frage 10: Die Ableitung von $-e^{-\sin(x)}$ ist $-e^{-\sin(x)} \cdot \cos(x)$. Wahr oder Falsch

Frage 11: Die Ableitung von $\sin(\ln(x))$ ist $\frac{\cos(\ln(x))}{x}$. Wahr oder Falsch

Frage 12: Die Ableitung von $e^x \cdot e^2$ ist e^{x+2} . Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen: Frage 1: a) und d) sind wahr. Die anderen beiden Regeln wären: $(cf(x))' = c'f'(x)$ und $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$; Frage 2: Ja. Die Funktion e^x abgeleitet gibt wieder e^x . Dies ist sehr interessant, da die Steigung der Funktion bei jedem x-Wert genau gleich gross ist, wie der Funktionswert; Frage 3: Alle Antworten sind richtig; Frage 4: Falsch. Die Ableitung von $\frac{1}{4}x^3 + 2x$ ist $\frac{3}{4}x^2 + 2$; Frage 5: Falsch. Die Ableitung von $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; Frage 6: Falsch. $5x^2 \cdot 2x \cdot 3 = 30x^3$ und dessen Ableitung ist $90x^2$; Frage 7: Falsch. Umgekehrt, die Ableitung von $\ln(x)$ ist $\frac{1}{x}$.

Die Ableitung von $\frac{1}{x} = x^{-1}$ wäre $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$; Frage 8: Wahr. Mit der Summenregel dürfen alle Summanden einzeln abgeleitet werden und wieder summiert werden; Frage 9: Wahr. Folgt aus der Kettenregel; Frage 10: Falsch. Die Ableitung von $-e^{-\sin(x)}$ ist $e^{-\sin(x)} \cdot \cos(x)$. Achtung, dies ist ein häufiger Fehler bei dieser Art von Aufgabe. Man muss sorgfältig mit dem Vorzeichen sein; Frage 11: Wahr. Folgt aus der Kettenregel; Frage 12: Wahr. $e^x \cdot e^2 = e^{x+2}$ und das abgeleitet ergibt wieder e^{x+2} .