Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I - Analysis" von Christoph Luchsinger und Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich.

4. DIE ABLEITUNG

(4.2) Die Definition der Ableitung (englisch: derivative)

Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion (einer Variablen) mit Definitionsbereich $D(f)$, und es sei $x_0 \in D(f)$.

1) f heisst *differenzierbar (englisch: differentiable) an der Stelle* x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Unter anderem heisst das: er ist nicht $\pm\infty$. 0 ist erlaubt.

2) f heisst *differenzierbar auf der Teilmenge* $X \subset D(f)$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar ist.

3) f heisst *differenzierbar* (ohne weitere Präzisierung), falls diese Funktion auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar ist.

4) Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so heisst die Zahl

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

die *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

5) Es sei D' die Menge aller x, in denen f differenzierbar ist. Dann wird durch

$$f' : D' \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

eine neue Funktion definiert. Sie heisst die *abgeleitete Funktion* (oder kurz Ableitung) von f.

Im Buch finden Sie viele Bemerkungen zu Detailfragen, welche dringends durchzulesen sind! Dort werden viele Quellen für Missverständnisse ausgeräumt.

(4.4) Beispiele zur Differenzierbarkeit

a) Quadratfunktion

b) Wurzelfunktion

c) Betragsfunktion

d) Nicht-Differenzierbarkeit

(4.5) Höhere Ableitungen

Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und D' sei wie in (4.2.5) die Menge aller x, für welche f differenzierbar ist. Auf D' ist dann die *abgeleitete Funktion*

$$f' : D' \to \mathbb{R}$$

definiert. (In den meisten Fällen ist $D' = D(f)$, eventuell mit Ausnahme einiger Punkte, vgl. (4.4.b,c).)

Wenn nun die Funktion f' an der Stelle $x_0 \in D'$ ihrerseits differenzierbar ist, so bezeichnet man ihre Ableitung an dieser Stelle mit

$$f''(x_0)$$

und erhält so eine neue Funktion, die *zweite Ableitung*

$$\boxed{f'' : D'' \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f''(x)}$$

(f' heisst natürlich auch die *erste* Ableitung).

So kann man weiterfahren und erhält die *höheren Ableitungen*

$$f'' = f^{(2)},\ f''' = f^{(3)},\ f^{(4)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots\ .$$

(Es ist unpraktisch, mehr als drei Striche hinzuschreiben.) In Formeln ist es manchmal bequem, $f' = f^{(1)}$ und $f = f^{(0)}$ zu setzen; unter der "nullten Ableitung" ist also die Funktion selbst zu verstehen.

Die Funktion f heisst *unendlich oft differenzierbar*, wenn $f^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Andere gebräuchliche Bezeichnungen für die höheren Ableitungen sind:

$$\boxed{y''(x_0),\ \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0),\ \frac{d^2 y}{dx^2}(x_0), \ldots,\ \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{etc.}}$$

(Beachten Sie die Stellung der "Exponenten" in den drei letzten Bezeichnungen.)

Englisch: second derivative, third derivative, n-th derivative

Beispiel

In (3.2) haben wir die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ definiert durch

$$v(t) = s'(t) \ .$$

Genau gleich kann man die momentane Änderung der Geschwindigkeit definieren, sie ist durch

$$a(t) = v'(t)$$

gegeben und heisst bekanntlich die *Beschleunigung* (zur Zeit t). Fassen wir die beiden Gleichungen zusammen, so finden wir:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \ .$$

In der Physik pflegt man die Ableitung nach der Zeit t, wie in (4.3.c) erwähnt, mit Punkten zu bezeichnen. Also:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) \ .$$

(4.6) Exkurs über stetige Funktionen

Anschaulich bedeutet stetige Funktion:

* kleine Änderung in x, dann auch kleine Änderung in y

* nachfahrbar mit Stift ohne abzusetzen (reicht für diese Vlsg)

* nicht sprunghaft

Zum Beispiel:

* Körpertemperatur als Funktion der Zeit

* alltäglicher Luftdruck; ausser Explosionen

* Kugelvolumen als Funktion des Radius r: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$: Volumen wächst stetig mit r

* Population wächst nicht stetig: ± 1:

d) <u>Definition</u>

Wie die Beispiele zeigen, ist mit stetiger Funktion folgendes gemeint: Die Funktion f soll "stetig an der Stelle x_0" heissen, wenn $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$ liegt, sofern nur x genügend nahe bei x_0 liegt. Nun ist aber noch nicht genau gesagt, was "$f(x)$ nahe bei $f(x_0)$" bedeuten soll. Soll der Abstand zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ kleiner als 1/1000, kleiner als 1/1'000'000 oder kleiner als sonstwas sein? Es leuchtet ein, dass keine noch so kleine Zahl ein für allemal ausreichen wird. Man kommt deshalb auf folgende Definition:

> Die Funktion f heisst *stetig (englisch: continuous) an der Stelle* x_0, wenn $f(x)$ beliebig nahe, d.h. so nahe wie man nur will, bei $f(x_0)$ liegt, vorausgesetzt, dass x genügend nahe bei x_0 liegt.

Man kann die obige Definition auch formelmässig ausdrücken; etwas ganz Ähnliches haben wir bei der präzisen Definition des Grenzwerts in (3.6.b) getan:

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$. Die Funktion f heisst stetig an der Stelle x_0, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine (von ε abhängige) Zahl $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. (Die Voraussetzungen $x, x_0 \in D$ verstehen sich von selbst.)

Diese Bedingung für die Stetigkeit von f in x_0 lässt sich anhand der folgenden Skizze veranschaulichen:

Zu jeder gegebenen "Maximalabweichung" $\varepsilon > 0$ lässt sich also eine "Toleranz" $\delta > 0$ angeben, so dass für alle x im "Toleranzbereich" ($|x - x_0| < \delta$) $f(x)$ um weniger als die "Maximalabweichung" von $f(x_0)$ entfernt ist ($|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).

e) Wichtige stetige Funktionen

g) Stetigkeit und Differenzierbarkeit

A 4-11

Wie sind in den Übungen die Aufgaben zu Blatt 4 zu lösen?

Wenn es um Limesberechnungen geht:

In einem Mathematikstudium würden wir Limes' mit sogenannten ϵ–δ-Argumentationen gründlich beweisen (siehe Kleingedrucktes im Buch). In MAT 182 verzichten wir aber darauf und gehen wie folgt vor:
1. Wir versuchen, x_0 für x einzusetzen: $\lim_{x\to x_0} 2xx_0 = 2x_0^2$.
2. Führt dies zu 0/0 (wie bei Differenzialquotienten) oder anderen Problemen, müssen wir zuerst umformen, z.B. durch Polynomdivision!

Stetigkeit und Differenzierbarkeit prüfen, z.B. bei Aufgaben mit abschnittsweise definierten Funktionen ("geschweifte Klammern"):

1. Eine Funktion f ist in x_0 stetig, wenn der Wert von links und von rechts gegen x_0 kommend gleich ist und dies auch gleich $f(x_0)$ ist. Intuitiv heisst dies, dass der Graph der Funktion bei x_0 kein Loch und keinen Sprung besitzt.
2. Eine *stetige* (!) Funktion ist in x_0 differenzierbar, wenn der Wert seiner Ableitung in beiden Regionen ebenfalls gegen x_0 kommend übereinstimmt: dann hat der Graph bei x_0 kein Loch, keinen Sprung, und auch keinen Knick.

Achtung: Differenzierbarkeit setzt Stetigkeit voraus! Es kann ja sein, dass eine Funktion die gleiche Ableitung von links und rechts hat und doch einen Sprung bei x_0 hat. Deshalb immer zuerst schauen, ob die Funktion dort auch stetig ist.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.