B. DIFFERENTIALRECHNUNG

3. BEISPIELE ZUM BEGRIFF DER ABLEITUNG

(3.2) Geschwindigkeit

Wenn man mit dem Auto eine Strecke von 150 km in zwei Stunden zurückgelegt hat, so betrug die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum offenbar 75 km/h gemäss der Formel

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegte Strecke}}{\text{benötigte Zeit}}.$$

Siehe auch https://schweizermonat.ch/stundenkilometer-und-andere-absurditaeten

(3.3) Wachstumsgeschwindigkeit

Es sei $N = N(t)$ die von der Zeit t abhängige Grösse einer Bakterienkultur. Für zwei Zeitpunkte t_0 und t_1 $(t_0 < t_1)$ ist $\Delta N = N(t_1) - N(t_0)$ der *Zuwachs* im Zeitintervall $[t_0, t_1]$. (ΔN kann auch negativ sein, ein negativer Zuwachs entspricht einfach einer Abnahme).

Um eine Vorstellung von der Schnelligkeit des Wachstums zu erhalten, muss man diesen Zuwachs ΔN natürlich auf die verflossene Zeit $\Delta t = t_1 - t_0$, d.h. auf die Länge des betrachteten Zeitintervalls, beziehen. Der Ausdruck

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

stellt den mittleren Zuwachs pro Zeiteinheit dar, der auch "mittlere Wachstumsgeschwindigkeit" genannt wird.

(3.4) Tangente an eine Kurve

Wir betrachten den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und wählen einen Wert x_0 aus dem Definitionsbereich (Die Kenntnis dieser Begriffe wird vorausgesetzt; sie sind in (26.9) zusammengestellt). Wir möchten nun die Tangente an die Kurve im Punkt $P(x_0, y_0)$ bestimmen. Da diese jedenfalls durch P geht, genügt es, ihre Steigung anzugeben. Zu diesem Zweck führt man die folgende, Ihnen wohl von früher her bekannte, Betrachtung durch: Wir wählen einen von x_0 verschiedenen Wert x_1 auf der x–Achse und betrachten neben $P(x_0, y_0)$ noch $P_1(x_1, y_1)$. Dabei kann x_1 sowohl $> x_0$ als auch $< x_0$ sein.

Mit $\Delta f := f(x_1) - f(x_0)$ und $\Delta x := x_1 - x_0$ ist die Steigung $a = \tan\varphi_1$ dieser Sekante gegeben durch

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \;.$$

Lassen wir nun x_1 gegen x_0 streben, so wird sich die Sekante immer mehr jener Geraden nähern, die man vom Gefühl her die Tangente nennen wird.

Für die Steigung $\tan\varphi$ der Tangente wird man somit vernünftigerweise die folgende Definition treffen:

$$\tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;.$$

Wiederum hat der Grenzwert dieselbe Form wie in (3.2).

Es sei noch darauf hingewiesen, dass x sowohl von unten (von links) wie auch von oben (von rechts) gegen x_0 streben kann. Damit man in sinnvoller Weise von der Tangentensteigung an der Stelle x_0 sprechen darf, muss man in beiden Fällen denselben Wert $\tan\varphi$ für die Steigung erhalten (vgl. auch (4.4.c)).

Wir geben noch ein einfaches Zahlenbeispiel für die Funktion $f(x) = x^2$ und die Stelle $x_0 = 1$. Wichtig ist vor allem die letzte Kolonne, welche die Sekantensteigung angibt.

x	x_0	$\Delta x = x - x_0$	$f(x) = x^2$	$f(x_0) = x_0^2$	$\Delta f = f(x) - f(x_0)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
2	1	1	4	1	3	3
1.5	1	0.5	2.25	1	1.25	2.5
1.3	1	0.3	1.69	1	0.69	2.3
1.1	1	0.1	1.21	1	0.21	2.1
1.05	1	0.05	1.1025	1	0.1025	2.05
1.01	1	0.01	1.0201	1	0.0201	2.01
1.001	1	0.001	1.002001	1	0.002001	2.001

(3.6) Grenzwerte von Funktionen

a) Beispiele

b) Die Definition

Gestützt auf die obigen anschaulichen Beispiele setzen wir folgendes fest:

Die Zahl r heisst der *Grenzwert* (oder *Limes*) der Funktion g an der Stelle x_0, wenn $g(x)$ beliebig nahe bei r liegt, für alle x ($x > x_0$ und $x < x_0$), die genügend nahe bei x_0 sind, wobei aber stets $x \neq x_0$ sein muss. Man schreibt für diesen Sachverhalt:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = r \quad \text{oder} \quad g(x) \to r \ \text{ für } \ x \to x_0 \, .$$

Beachtenswert ist, dass zur Bestimmung von $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ nur die Funktionswerte $g(x)$ für $x \neq x_0$ eine Rolle spielen. Die Funktion g braucht an der Stelle x_0 nicht einmal definiert zu sein.

c)-e) Paar Bemerkungen zu Grenzwerten, weitere Definitionen und Beispiele

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.