23. DIFFERENTIALRECHNUNG VON FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

(23.2) Partielle Ableitungen

a) Erste Beispiele

Eine Funktion von mehreren Variablen kann nach jeder dieser Variablen einzeln abgeleitet werden. Auf diese Weise erhält man die sogenannten partiellen Ableitungen dieser Funktion. Wir illustrieren dies zunächst an Beispielen von Funktionen $f(x, y)$ von zwei Variablen. Gemäss (22.6) können wir durch Festhalten der einen bzw. der anderen Variablen zwei partielle Funktionen bilden:

$$\varphi(x) = f(x, y_0) \ , \qquad y_0 \quad \text{konstant} \ ,$$
$$\psi(y) = f(x_0, y) \ , \qquad x_0 \quad \text{konstant} \ .$$

Da nun φ und ψ Funktionen einer Variablen sind, können wir sie in der üblichen Weise ableiten.

Beispiele

b) Allgemeine Definition und Bezeichnungen

Die anschauliche Definition lautet in Worten (für die präzise Formulierung siehe d)):

Die partielle Ableitung von f nach x ist die gewöhnliche Ableitung der partiellen Funktion in Richtung x von f .

Das Analoge gilt natürlich für y und — falls mehr als zwei Variablen vorhanden sind — auch für alle übrigen Variablen.

Für die partiellen Ableitungen sind verschiedene Bezeichnungen im Gebrauch. Für die partiellen Ableitungen an der Stelle $x = x_0,\ y = y_0$ schreibt man

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \text{oder} & f_x(x_0, y_0)\ , \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & \text{oder} & f_y(x_0, y_0)\ . \end{array}}$$

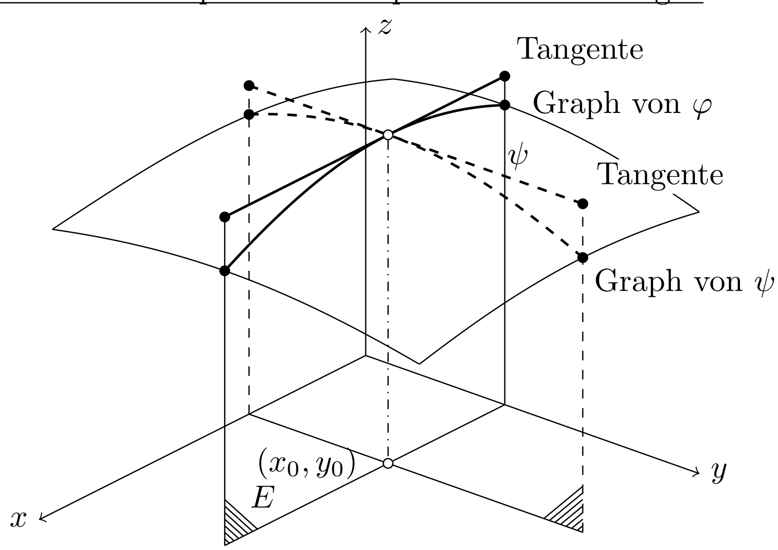
Die runden ∂ sollen dabei andeuten, dass es sich um eine partielle und nicht um eine gewöhnliche Ableitung handelt.

c) Beispiele zur praktischen Berechnung

Die Definition der partiellen Funktion bestand ja gerade darin, dass man alle Variablen bis auf eine einzige konstant setzte. Daraus ergibt sich folgende praktische Regel:

Um die partielle Ableitung von f nach einer Variablen, z.B. nach x, zu berechnen, denkt man sich alle Variablen ausser x konstant und leitet dann mit den üblichen Differentiationsregeln nach x ab.

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen



Beispiele

(23.4) Höhere partielle Ableitungen

Es sei f auf D partiell differenzierbar. Dann können wir, wie schon erwähnt, die partiellen Ableitungen als Funktionen betrachten:

$$f_x : D \to \mathbb{R} \ , \quad f_y : D \to \mathbb{R} \ .$$

Diese Funktionen können nun wieder partiell differenzierbar sein, d.h., wir können sie nach x bzw. nach y ableiten. Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

- f_x nach x ableiten: Ergebnis $f_{xx}(x,y)$ oder $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$,
- f_x nach y ableiten: Ergebnis $f_{xy}(x,y)$ oder $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.
- f_y nach x ableiten: Ergebnis $f_{yx}(x,y)$ oder $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$,
- f_y nach y ableiten: Ergebnis $f_{yy}(x,y)$ oder $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Die erhaltenen Grössen heissen natürlich die *zweiten partiellen Ableitungen* von f. Ganz entsprechend geht man für Funktionen von mehr als zwei Variablen vor. Wir wiederholen die eingeführten Bezeichnungen:

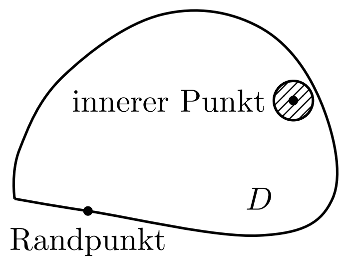
- f zweimal nach x abgeleitet: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
- f zuerst nach x, dann nach y abgeleitet: $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Im zweiten Fall ist die Reihenfolge von x und y unterschiedlich. Wie wir aber weiter unten sehen werden, spielt dies in den meisten Fällen keine Rolle.

<u>Beispiele</u>

(23.5) Extrema von Funktionen von zwei Variablen

a) Vorbereitungen Im Buch werden an dieser Stelle Begriffe wie ϵ-Umgebung im $\mathbb{R}^2$, innerer Punkt einer Menge,



sowie absolute und relative Extrema genau definiert. Weil die Begriffe bereits in einer Dimension vorgekommen sind und sehr anschaulich sind, verweisen wir aus Zeitgründen hier auf das Buch und besprechen die Begriffe lediglich anhand von eindrücklichen Beispielen.

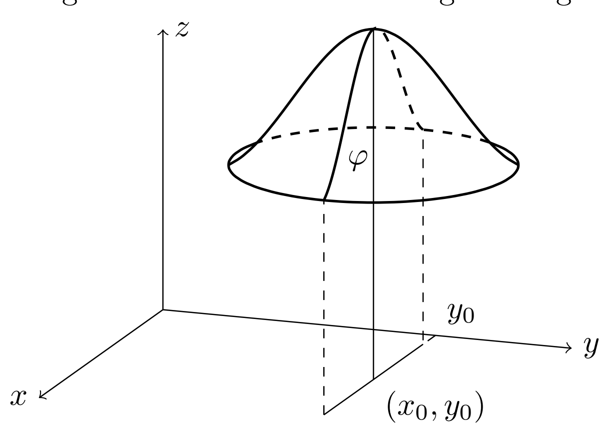
b) Wie bestimmt man Extrema?

In Analogie zum Fall einer Variablen (6.5) gilt die folgende notwendige Bedingung:

Es sei (x_0, y_0) ein innerer Punkt von $D(f)$ und f sei an dieser Stelle partiell differenzierbar. Wenn f in (x_0, y_0) ein relatives Extremum hat, dann gilt

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \;, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0 \;.$$

Wir geben eine anschauliche Begründung für den Fall eines relativen Maximums:



Wenn f an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Maximum hat, so hat die partielle Funktion

$$\varphi(x) = f(x_0, y_0)$$

an der Stelle x_0 ebenfalls ein relatives Maximum. Aufgrund der notwendigen Bedingung von (6.5.d)) für Funktionen einer Variablen muss dann $\varphi'(x_0) = 0$ sein. Nun ist aber

$\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ (vgl. (23.2.d)), woraus die Bedingung

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

bereits folgt. Die zweite Bedingung

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

wird ganz analog bewiesen. Wir können auch ein Analogon zur Zusammenfassung von (6.5.d)) geben:

Ein relatives Extremum (wenn es überhaupt existiert) tritt an einer der folgenden Stellen auf:

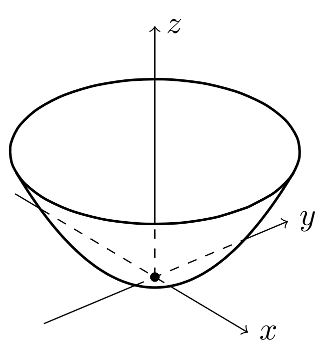
1. Innere Punkte (x_0, y_0) mit $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$,
2. Randpunkte von $D(f)$,
3. Stellen, wo f nicht partiell differenzierbar ist.

Unter diesen möglichen Kandidaten für Extrema ermittelt man dann durch Vergleich die absoluten Maxima bzw. Minima, sofern solche vorhanden sind. Beachten Sie bitte auch die Warnungen im Buch bei Funktionen von mehreren Variablen auf Seiten 358-359!

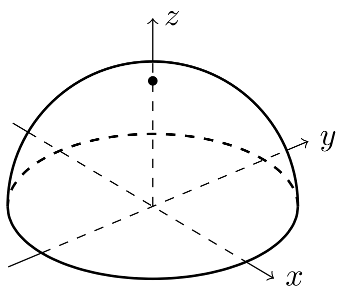
c) Wie bestimmt man die Art des Extremums?

Schon im Falle einer Variablen ist das Verschwinden der Ableitung keine hinreichende Bedingung für ein Extremum. Man wird deshalb erwarten, dass dies im Falle zweier Veränderlicher nicht anders ist. Wir untersuchen dazu einige Beispiele (vgl. (22.4.b)):

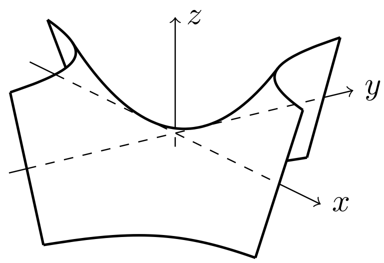
1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $D(f) = \mathbb{R}^2$.



2. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D(f) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.



3. $f(x,y) = xy,\ D(f) = \mathbb{R}^2$.



Gelegentlich lässt sich die Art eines Extremums auch dadurch ermitteln, dass man zum vornherein weiss, dass ein Maximum oder ein Minimum auftreten muss.

Ähnlich wie im Fall einer Variablen (6.5.e)) kann man aber auch die zweiten (partiellen) Ableitungen heranziehen, um den Charakter eines Extremums zu untersuchen. Man setzt dazu voraus, dass diese zweiten partiellen Ableitungen, also $f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$ existieren und stetig sind. Insbesondere ist dann $f_{xy} = f_{yx}$ (23.4). Nun gilt der folgende, ohne Beweis angegebene Sachverhalt:

- Voraussetzungen:
  - (x_0, y_0) sei innerer Punkt von $D(f)$,
  - $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$,
  - die 2. partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig.
- Bezeichnung: Wir definieren die Zahl A durch

$$A = A(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 \ .$$

- Behauptung:

1. Ist $A > 0$, so hat f in (x_0, y_0) ein relatives Extremum und zwar liegt
   - für $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ein relatives Maximum vor,
   - für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ein relatives Minimum vor.
2. Ist $A < 0$, so hat f in (x_0, y_0) kein relatives Extremum.
3. Ist $A = 0$, so kann auf diesem Wege keine Entscheidung gefällt werden.

$\boxed{\text{(23.7) Die Methode der kleinsten Quadrate}}$

Methode der kleinsten Quadrate, Fortsetzung:

Übungen: 1. Berechnen Sie $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cos(x^2 + xy)$

2. In der Differentialgleichung

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

kommen partielle Ableitungen vor. Man spricht deshalb von einer *partiellen Differentialgleichung*. Welche Beziehung müssen die Zahlen a und b erfüllen, damit $C(x,t) = \exp(ax + bt)$ eine Lösung der obigen Gleichung ist?

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

Die partielle Ableitung von f nach x ist die gewöhnliche Ableitung der partiellen Funktion in Richtung x von f. Für die partiellen Ableitungen sind verschiedene Bezeichnungen im Gebrauch. Für die partiellen Ableitungen an der Stelle $x = x_0,\ y = y_0$ schreibt man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad f_x(x_0, y_0)\ , \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad f_y(x_0, y_0)\ . \end{aligned}$$

Es sei f auf D partiell differenzierbar. Dann können wir die partiellen Ableitungen als Funktionen betrachten: $f_x : D \to \mathbb{R}\ ,\quad f_y : D \to \mathbb{R}$. Diese Funktionen können nun wieder partiell differenzierbar sein, d.h., wir können sie nach x bzw. nach y ableiten. Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

- f_x nach x ableiten: Ergebnis $\quad f_{xx}(x, y)$ oder $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$,
- f_x nach y ableiten: Ergebnis $\quad f_{xy}(x, y)$ oder $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.
- f_y nach x ableiten: Ergebnis $\quad f_{yx}(x, y)$ oder $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$,
- f_y nach y ableiten: Ergebnis $\quad f_{yy}(x, y)$ oder $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Die erhaltenen Grössen heissen natürlich die *zweiten partiellen Ableitungen* von f. Ganz entsprechend geht man für Funktionen von mehr als zwei Variablen vor. Wir wiederholen die eingeführten Bezeichnungen:

- f zweimal nach x abgeleitet: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
- f zuerst nach x, dann nach y abgeleitet: $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

In Analogie zum Fall einer Variablen (6.5) gilt die folgende notwendige Bedingung: Es sei (x_0, y_0) ein innerer Punkt von $D(f)$ und f sei an dieser Stelle partiell differenzierbar. Wenn f in (x_0, y_0) ein relatives Extremum hat, dann gilt $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Wir können auch ein Analogon zur Zusammenfassung von (6.5.d)) geben: Ein relatives Extremum (wenn es überhaupt existiert) tritt an einer der folgenden Stellen auf:

1. Innere Punkte (x_0, y_0) mit $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$,
2. Randpunkte von $D(f)$,
3. Stellen, wo f nicht partiell differenzierbar ist.

Unter diesen möglichen Kandidaten für Extrema ermittelt man dann durch Vergleich die absoluten Maxima bzw. Minima, sofern solche vorhanden sind. Beachten Sie bitte auch die Warnungen im Buch bei Funktionen von mehreren Variablen auf Seiten 358-359!

Ähnlich wie im Fall einer Variablen (6.5.e)) kann man aber auch die zweiten (partiellen) Ableitungen heranziehen, um den Charakter eines Extremums zu untersuchen. Man setzt dazu voraus, dass diese zweiten partiellen Ableitungen, also $f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$ existieren und stetig sind. Insbesondere ist dann $f_{xy} = f_{yx}$ (23.4). Dan gilt:

- Voraussetzungen:
  - (x_0, y_0) sei innerer Punkt von $D(f)$,
  - $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$,
  - die 2. partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig.
- Bezeichnung: Wir definieren die Zahl A durch

$$A = A(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 \,.$$

- Behauptung:
  1. Ist $A > 0$, so hat f in (x_0, y_0) ein relatives Extremum und zwar liegt
     - für $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ein relatives Maximum vor,
     - für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ein relatives Minimum vor.
  2. Ist $A < 0$, so hat f in (x_0, y_0) kein relatives Extremum.
  3. Ist $A = 0$, so kann auf diesem Wege keine Entscheidung gefällt werden.

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Die partielle Ableitung einer Funktion $f(x, y)$ nach x wird berechnet, indem y als Konstante betrachtet wird, während f nach x differenziert wird. Wahr oder Falsch

Frage 2: Sei $f(x, y) = yx^2 - yx$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x?
A) $f_x(x, y) = 2xy - 1$
B) $f_x(x, y) = x^2 - x$
C) $f_x(x, y) = 2xy - y$
D) $f_x(x, y) = x^2 - x$

Frage 3: Sei $f(x, y) = yx^2 - yx$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y?
A) $f_y(x, y) = 2xy - 1$
B) $f_y(x, y) = x^2 - 1$

C) $f_y(x, y) = 2xy - y$
D) $f_y(x, y) = x^2 - x$

Frage 4: Sei $f(x, y) = x^2y + 3xy^2$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x?
A) $f_x(x, y) = 2xy + 3y^2$
B) $f_x(x, y) = x^2 + 6xy$
C) $f_x(x, y) = 2x + 3y$

Frage 5: Sei $f(x, y) = x^2y + 3xy^2$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y?
A) $f_y(x, y) = 2xy + 3y^2$
B) $f_y(x, y) = x^2 + 6xy$
C) $f_y(x, y) = 2x + 3y$

Frage 6: Sei $f(x, y) = \sin(xy) + e^x$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x?
A) $f_x(x, y) = \cos(x) \cdot y + e^x$
B) $f_x(x, y) = \sin(y) \cdot xy + e^x$
C) $f_x(x, y) = \cos(xy) \cdot y + e^x$

Frage 7: Sei $f(x, y) = \sin(xy) + e^x$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y?
A) $f_y(x, y) = \cos(xy) \cdot x + xe^x$
B) $f_y(x, y) = \cos(y) \cdot x$
C) $f_y(x, y) = \cos(xy) \cdot x$

Frage 8: Sei $f(x, y, z) = x \cdot \ln(y) + y^2 \cdot e^z$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y, z)$ nach y?
A) $f_y(x, y, z) = x + 2y^2 \cdot e^z$
B) $f_y(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2y$
C) $f_y(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2y \cdot e^z$

Frage 9: Sei $f(x, y, z) = \cos(xz) + \sin(yz) + e^x$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y, z)$ nach z?
A) $f_z(x, y, z) = -x\sin(xz) - y\cos(yz)$
B) $f_z(x, y, z) = -x\sin(xz) + y\cos(yz)$
C) $f_z(x, y, z) = \cos(xz) + \cos(yz)$

Frage 10: Sei $f(x, y, z) = \cos(xz) + \sin(yz) + e^x$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die partielle Ableitung von $f(x, y, z)$ nach x?

A) $f_z(x, y, z) = -z\sin(xz) + y\cos(yz) + e^x$
B) $f_z(x, y, z) = +z\cos(yz)$
C) $f_z(x, y, z) = -z\sin(xz) + e^x$

Frage 11: Sei $f(x, y) = e^{2xy}$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die zweite partielle Ableitung, wenn zweimal nach x abgeleitet wird?
A) $f_{xx}(x, y) = 2ye^{2xy}$
B) $f_{xx}(x, y) = 2y^2e^{2xy}$
C) $f_{xx}(x, y) = 4y^2e^{2xy}$

Frage 12: Sei $f(x, y) = e^{x+y}$. Welche der folgenden Funktionen beschreibt die zweite partielle Ableitung, wenn zuerst nach x, dann nach y abgeleitet wird?
A) $f_{xy}(x, y) = e^{x+y}$
B) $f_{xy}(x, y) = xye^{x+y}$
C) $f_{xy}(x, y) = 1$

Lösungen zu den Klickerfragen:

Frage 1: Wahr. Bei der partiellen Ableitung nach x wird nur die Abhängigkeit von x betrachtet, während alle anderen Variablen, wie y, als konstant behandelt werden; Frage 2: C) $f_x(x, y) = 2xy - y$; Frage 3: D) $f_y(x, y) = 2xy - x$; Frage 4: A) $f_x(x, y) = 2xy + 3y^2$; Frage 5: B) $f_y(x, y) = x^2 + 6xy$; Frage 6: C) $f_x(x, y) = \cos(xy) \cdot y + e^x$; Frage 7: C) $f_y(x, y) = \cos(xy) \cdot x$; Frage 8: C) $f_y(x, y, z) = \frac{x}{y} + 2y \cdot e^z$; Frage 9: B) $f_z(x, y, z) = -x\sin(xz) + y\cos(yz)$; Frage 10: C) $f_z(x, y, z) = -z\sin(xz) + e^x$; Frage 11: C) $f_{xx}(x, y) = 4y^2e^{2xy}$; Frage 12: A) $f_{xy}(x, y) = e^{x+y}$.