

Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I - Analysis" von Christoph Luchsinger und Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. Das Copyright ist bei Birkhäuser!

F. FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

22. ALLGEMEINES ÜBER FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

(22.2) Einleitende Beispiele

(22.3) Der Begriff der Funktion von mehreren Variablen

Mit \mathbb{R}^2 bezeichnen wir die Menge aller *geordneten Paare* von reellen Zahlen. “Geordnet” heisst dabei, dass die 1. und die 2. Stelle zu unterscheiden sind: $(1, 2)$ ist nicht dasselbe wie $(2, 1)$. Geometrisch lässt sich \mathbb{R}^2 als Ebene deuten, indem man (x, y) als den Punkt P mit den kartesischen Koordinaten (x, y) interpretiert.

Analog ist \mathbb{R}^n die Menge aller geordneten “*n-Tupel*”

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Die Menge \mathbb{R}^n wird auch “*n-dimensionaler Raum*” genannt. Speziell besteht der 3-dimensionale Raum \mathbb{R}^3 aus allen geordneten “*Tripeln*” (x, y, z) .

In vollkommener Analogie zum Fall einer Variablen (26.9) geben wir nun die folgende allgemeine Definition:

Eine *Funktion von n Variablen* ist dadurch gegeben, dass jedem *n-Tupel* (x_1, x_2, \dots, x_n) aus einer gewissen (nicht-leeren) Teilmenge $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ (dem Definitionsbereich von f) in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zugeordnet wird.

Es ist klar, dass die Untersuchung einer Funktion von mehreren Variablen komplizierter ist als jene von Funktionen einer Variablen. Die meisten neuen Phänomene zeigen sich aber bereits beim Übergang von einer zu zwei Variablen. Dies erlaubt uns, die Theorie hauptsächlich an Beispielen von *Funktionen von zwei Variablen* zu illustrieren.

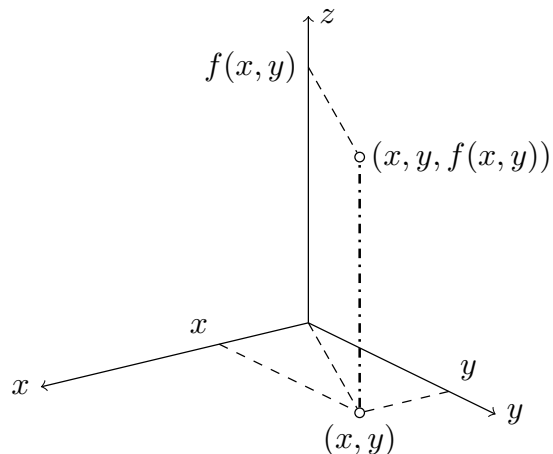
(22.4) Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

Es sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $D(f) \subset \mathbb{R}^2$) eine Funktion von zwei Variablen. Ein Paar (x, y) aus $D(f)$ entspricht dabei einem Punkt der x - y -Ebene.

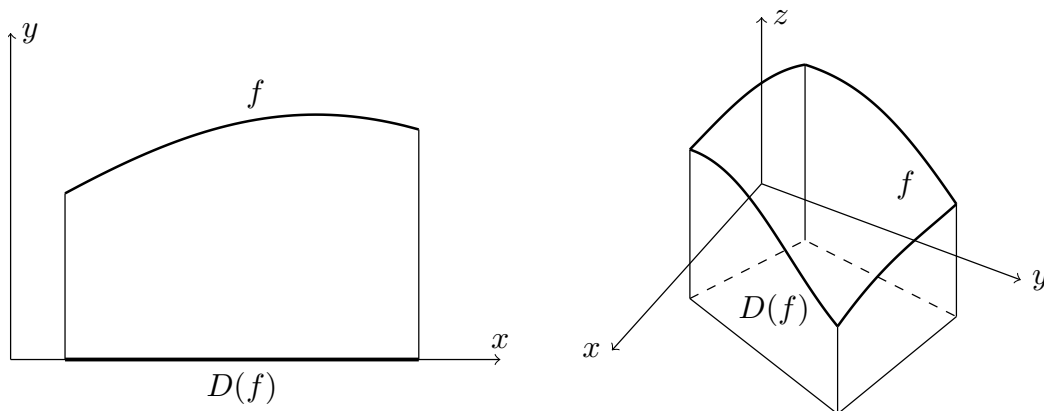
Wir betrachten nun ein räumliches Koordinatensystem und tragen über jedem Punkt $(x, y) \in D(f)$ den Funktionswert $f(x, y)$ in Richtung der z -Achse ab. Die so erhaltene Menge

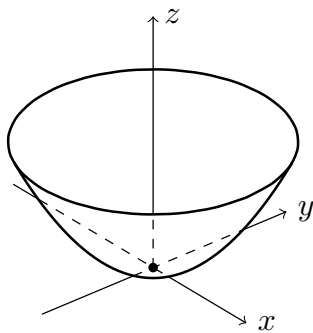
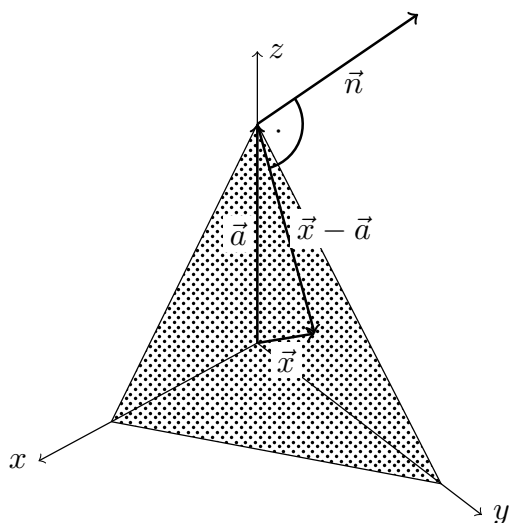
$$G = G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D(f)\}$$

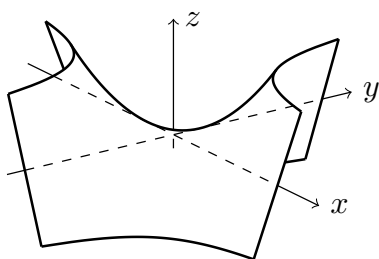
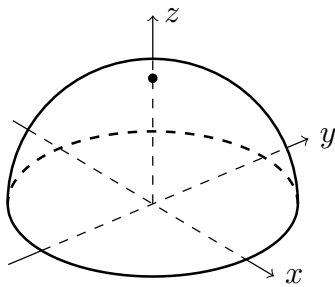
heisst der Graph von f .



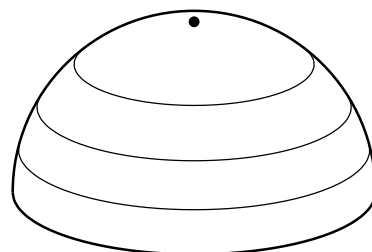
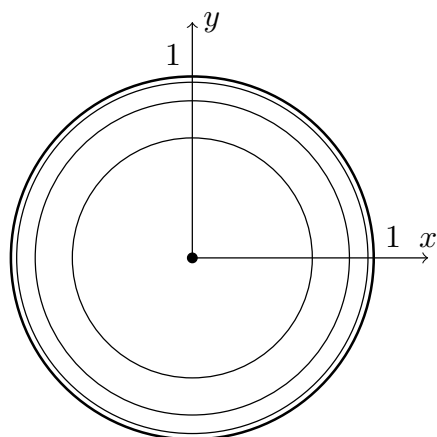
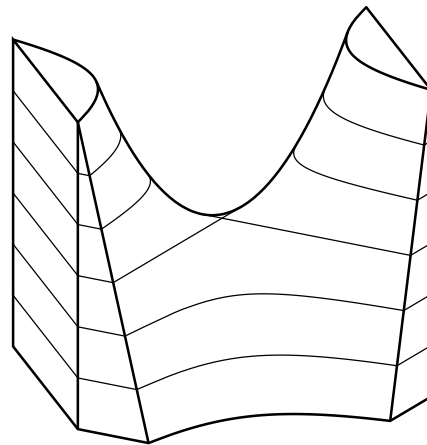
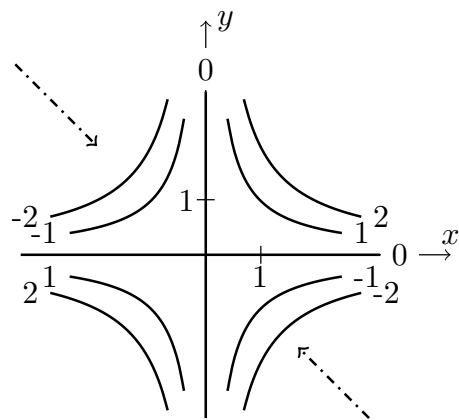
Statt eines Graphen wie links im unteren Bild, haben wir neu ein “Tuch” im dreidimensionalen Raum!



Beispiele I

Beispiele II

(22.5) Niveaulinien



(22.6) Partielle Funktionen

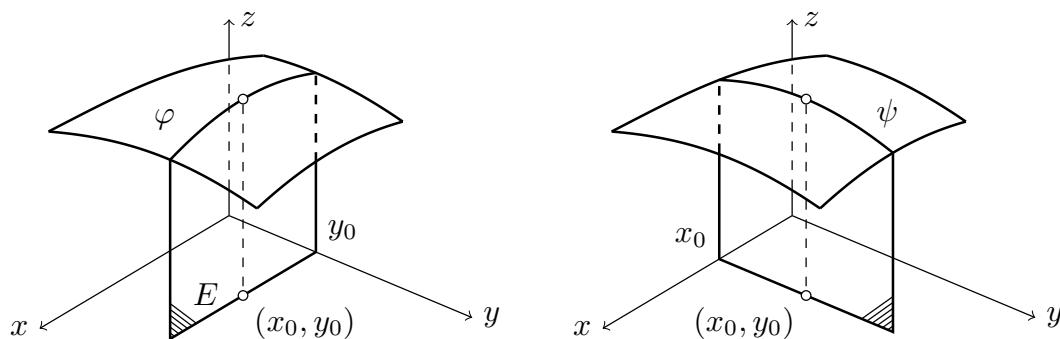
Nach diesem Beispiel betrachten wir den allgemeinen Fall einer Funktion von zwei Variablen

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y), \quad D(f) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Nun halten wir y konstant ($y = y_0$) und fassen nur noch x als Variable auf. Die so erhaltene Funktion einer Variablen

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

heißt eine partielle Funktion von f .



Wir bezeichnen diese Funktion im folgenden meist mit φ (genauer wäre φ_{y_0} , mit einem expliziten Hinweis auf y_0 , doch ist diese Bezeichnung zu umständlich). Also:

$$\varphi(x) = f(x, y_0) .$$

Entsprechend definiert man die partielle Funktion in Richtung y durch x_0 :

$$y \mapsto f(x_0, y) ,$$

wobei also jetzt x konstant ist ($x = x_0$) und y variiert. Wir bezeichnen diese partielle Funktion im folgenden mit ψ :

$$\psi(y) = f(x_0, y) .$$

1. Es sei $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$. Zeichnen Sie in der x - y -Ebene alle Punkte ein, für welche f nicht definiert ist. Zeichnen Sie die Niveaulinien für die Niveaus $c = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$.

2. Es sei $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{y}$, ($y > 0$). Bestimmen Sie die partiellen Funktionen für $x = -1, 0, 1$ und für $y = 1, 2, 3$. Zeichnen Sie eine räumliche Skizze.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

Eine *Funktion von n Variablen* ist dadurch gegeben, dass jedem n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) aus einer gewissen (nicht-leeren) Teilmenge $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ (dem Definitionsbereich von f) in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zugeordnet wird.

Es sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $D(f) \subset \mathbb{R}^2$) eine Funktion von zwei Variablen. Ein Paar (x, y) aus $D(f)$ entspricht dabei einem Punkt der x - y -Ebene. Wir betrachten nun ein räumliches Koordinatensystem und tragen über jedem Punkt $(x, y) \in D(f)$ den Funktionswert $f(x, y)$ in Richtung der z -Achse ab. Die so erhaltene Menge

$$G = G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D(f)\}$$

heisst der Graph von f .

Wir betrachten den allgemeinen Fall einer Funktion von zwei Variablen

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y), \quad D(f) \subset \mathbb{R}^2.$$

Nun halten wir y konstant ($y = y_0$) und fassen nur noch x als Variable auf. Die so erhaltene Funktion einer Variablen

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

heisst eine partielle Funktion von f .

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Der Punkt $(1, 2)$ in \mathbb{R}^2 ist geometrisch identisch mit dem Punkt $(2, 1)$ in \mathbb{R}^2 . Wahr oder Falsch

Frage 2: Die Menge \mathbb{R}^3 besteht aus allen möglichen Tripeln (x, y, z) , wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wahr oder Falsch

Frage 3: Eine Funktion von n Variablen ordnet jedem n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) aus dem Definitionsbereich $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ genau eine reelle Zahl $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ zu. Wahr oder Falsch

Frage 4: Die Zuordnung $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}^2$ ist eine Funktion von zwei Variablen. Wahr oder Falsch

Frage 5: Die Zuordnung $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ mit $D(f) = \mathbb{R}^2$ ist eine Funktion von zwei Variablen. Wahr oder Falsch

Frage 6: Die Zuordnung $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot e^{x_2}$ mit $D(f) = \mathbb{R}^2$ ist eine Funktion von zwei Variablen. Wahr oder Falsch

Frage 7: Die Zuordnung $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}$ mit $D(f) = \mathbb{R}^3$ ist eine Funktion von drei Variablen. Wahr oder Falsch

Frage 8: Zur Erinnerung: $G = G(f) = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D(f)\}$ heisst der Graph von f . Der Graph einer Funktion $f(x, y)$ ist eine Menge von Punkten in \mathbb{R}^3 , wobei jede z -Koordinate durch $f(x, y)$ bestimmt wird. Wahr oder Falsch

Frage 9: Der Punkt $(2, 3, f(2, 3))$ gehört zum Graphen der Funktion $f(x, y)$, sofern $(2, 3) \in D(f)$. Wahr oder Falsch

Frage 10: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = x + y$. Dann gehört der Punkt $(1, 2, 3)$ zum Graphen der Funktion $f(x, y)$. Wahr oder Falsch

Frage 11: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dann gehört der Punkt $(2, 1, 3)$ zum Graphen der Funktion $f(x, y)$. Wahr oder Falsch

Frage 12: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = x \cdot y$. Dann gehört der Punkt $(3, 0, 1)$ zum Graphen der Funktion $f(x, y)$. Wahr oder Falsch

Frage 13: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann gehört der Punkt $(1, 2, 6)$ zum Graphen der Funktion $f(x, y)$. Wahr oder Falsch

Frage 14: Sei $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ mit $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann gehört der Punkt $(1, 0, 1)$ zum Graphen der Funktion $f(x, y)$. Wahr oder Falsch

Frage 15: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = x \cdot y$. Dann ist die partielle Funktion für $y_0 = 5$ definiert als $\varphi_5(x) = f(x, 5) = 5x$. Wahr oder Falsch

Frage 16: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = x + y$. Dann ist die partielle Funktion für $y_0 = 3$ definiert als $\varphi_3(x) = f(x, 3) = x + 3$. Wahr oder Falsch

Frage 17: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y) = \sin(xy) \cdot y$. Dann ist die partielle Funktion für $x_0 = 1$ definiert als $\psi_1(y) = f(1, y) = \sin(y)$. Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen:

Frage 1: Falsch. Die Reihenfolge der Koordinaten ist entscheidend, daher sind $(1, 2)$ und $(2, 1)$ unterschiedliche Punkte in \mathbb{R}^2 ; Frage 2: Wahr; Frage 3: Wahr; Frage 4: Wahr.

Jeder Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ wird eindeutig auf eine reelle Zahl $x_1^2 + x_2^2$ abgebildet; Frage 5: Falsch. $f(x_1, x_2)$ ist nicht für $(x_1, x_2) = (0, 0)$ definiert, da der Nenner $x_1^2 + x_2^2 = 0$ wird. Der Definitionsbereich müsste angepasst werden, z.B. $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; Frage 6: Wahr. Die Sinus- und Exponentialfunktionen sind für alle reellen Zahlen definiert, daher ist die Zuordnung $f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gültig; Frage 7: Falsch. Die Wurzel ist nur definiert, wenn $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \geq 0$. Daher ist der Definitionsbereich eingeschränkt und kann nicht \mathbb{R}^3 sein; Frage 8: Wahr. Der Graph einer Funktion $f(x, y)$ ist eine Menge von Punkten in \mathbb{R}^3 , die durch die Zuordnung $z = f(x, y)$ entstehen, wobei $(x, y) \in D(f)$; Frage 9: Wahr. Jeder Punkt $(x, y, f(x, y))$ gehört zum Graphen, wenn $(x, y) \in D(f)$, da $G(f)$ genau aus diesen Punkten besteht; Frage 10: Wahr. $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ und somit in $D(f)$. Weiter gilt $(1, 2, 3) = (1, 2, 1 + 2) = (1, 2, f(1, 2))$, sodass der Punkt zum Graphen von $f(x, y)$ gehört; Frage 11: Wahr. $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ und somit in $D(f)$. Weiter gilt $(2, 1, 3) = (2, 1, 2^2 - 1^2) = (2, 1, f(2, 1))$, sodass der Punkt zum Graphen von $f(x, y)$ gehört; Frage 12: Falsch. $(3, 0) \in \mathbb{R}^2$, also $(3, 0) \in D(f)$. Jedoch gilt $f(3, 0) = 3 \cdot 0 = 0$, sodass der Punkt $(3, 0, 1) \neq (3, 0, f(3, 0))$ ist und nicht zum Graphen gehört; Frage 13: Falsch. $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$, also $(1, 2) \in D(f)$. Jedoch gilt $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$, nicht 6. Daher gehört der Punkt $(1, 2, 6)$ nicht zum Graphen; Frage 14: Wahr. Der Punkt $(1, 0) \in D(f)$, da $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$. Weiter gilt $f(1, 0) = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$, sodass $(1, 0, 1) = (1, 0, f(1, 0))$; Frage 15: Wahr. Die partielle Funktion entsteht, indem y durch $y_0 = 5$ ersetzt wird. Es folgt $\varphi_5(x) = f(x, 5) = 5x$, was korrekt ist; Frage 16: Wahr. Die partielle Funktion entsteht, indem y durch $y_0 = 3$ ersetzt wird. Es folgt $\varphi_3(x) = f(x, 3) = x + 3$, was korrekt ist; Frage 17: Wahr. Die partielle Funktion entsteht, indem x durch $x_0 = 1$ ersetzt wird. Es folgt $\psi_1(y) = f(1, y) = \sin(y)$, was korrekt ist.