F. FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

22. ALLGEMEINES ÜBER FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

(22.2) Einleitende Beispiele

(22.3) Der Begriff der Funktion von mehreren Variablen

Mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die Menge aller *geordneten Paare* von reellen Zahlen. "Geordnet" heisst dabei, dass die 1. und die 2. Stelle zu unterscheiden sind: $(1,2)$ ist nicht dasselbe wie $(2,1)$. Geometrisch lässt sich $\mathbb{R}^2$ als Ebene deuten, indem man (x,y) als den Punkt P mit den kartesischen Koordinaten (x,y) interpretiert.

Analog ist $\mathbb{R}^n$ die Menge aller geordneten "*n–Tupel*"

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ , \quad x_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ .$$

Die Menge $\mathbb{R}^n$ wird auch "*n–dimensionaler Raum*" genannt. Speziell besteht der 3–dimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ aus allen geordneten "Tripeln" (x,y,z).

In vollkommener Analogie zum Fall einer Variablen (26.9) geben wir nun die folgende allgemeine Definition:

Eine *Funktion von n Variablen* ist dadurch gegeben, dass jedem n–Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus einer gewissen (nicht-leeren) Teilmenge $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ (dem Definitionsbereich von f) in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zugeordnet wird.

Es ist klar, dass die Untersuchung einer Funktion von mehreren Variablen komplizierter ist als jene von Funktionen einer Variablen. Die meisten neuen Phänomene zeigen sich aber bereits beim Übergang von einer zu zwei Variablen. Dies erlaubt uns, die Theorie hauptsächlich an Beispielen von *Funktionen von zwei Variablen* zu illustrieren.

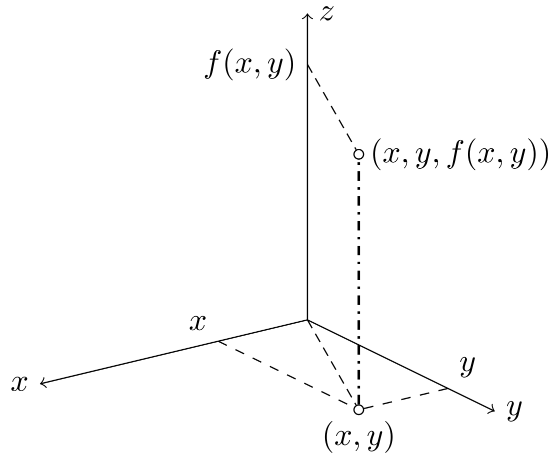
(22.4) Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ (mit $D(f) \subset \mathbb{R}^2$) eine Funktion von zwei Variablen. Ein Paar (x,y) aus $D(f)$ entspricht dabei einem Punkt der x-y–Ebene.

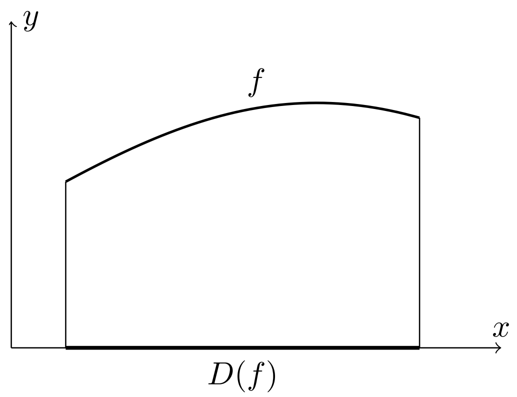
Wir betrachten nun ein räumliches Koordinatensystem und tragen über jedem Punkt $(x,y) \in D(f)$ den Funktionswert $f(x,y)$ in Richtung der z-Achse ab. Die so erhaltene Menge

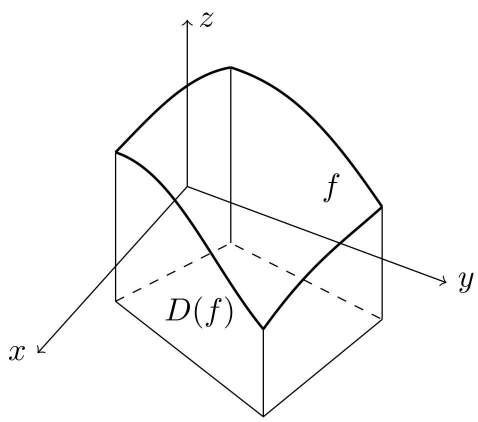
$$G = G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D(f)\}$$

heisst der Graph von f.

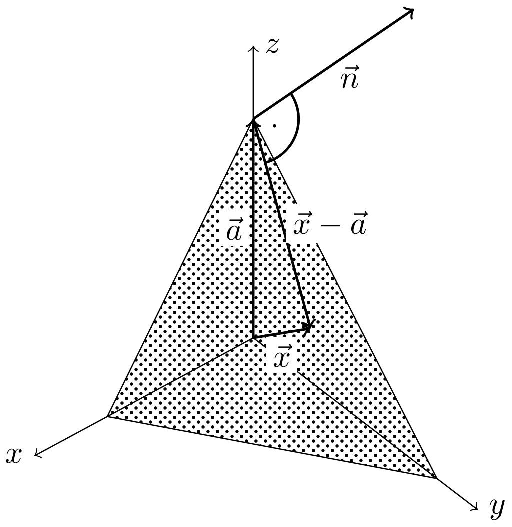


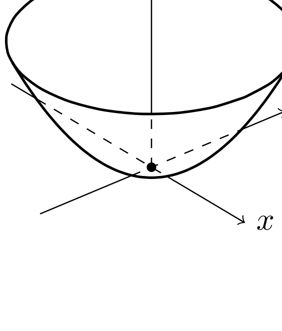
Statt eines Graphen wie links im unteren Bild, haben wir neu ein "Tuch" im dreidimensionalen Raum!



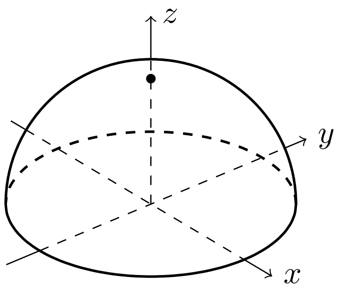


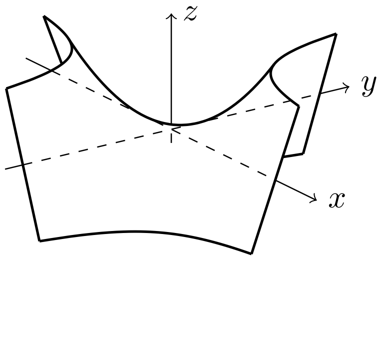
Beispiele I



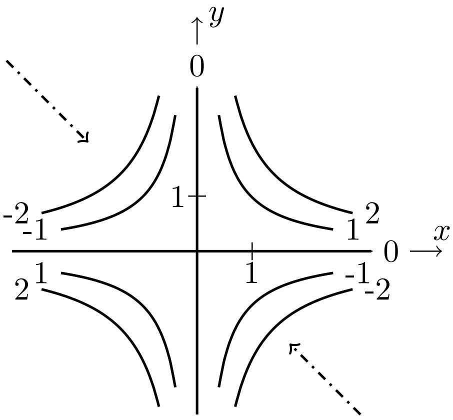


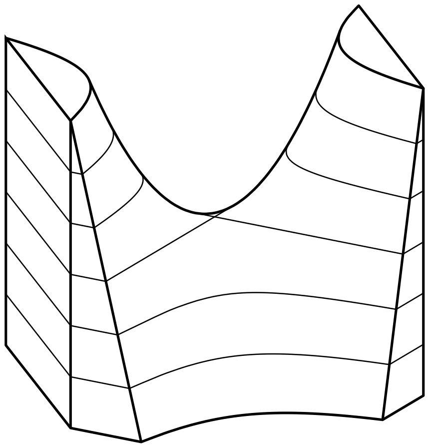
Beispiele II

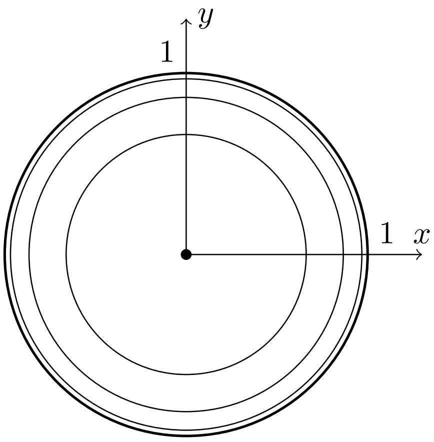


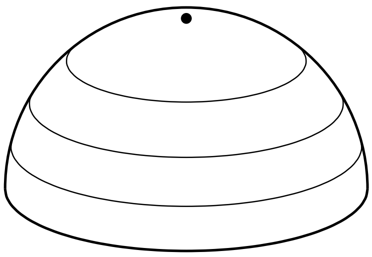


(22.5) Niveaulinien









(22.6) Partielle Funktionen

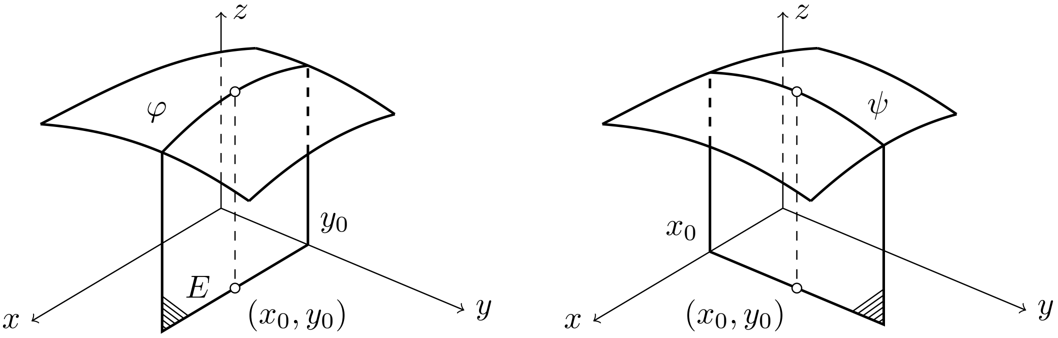
Nach diesem Beispiel betrachten wir den allgemeinen Fall einer Funktion von zwei Variablen

$$f : D(f) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y), \quad D(f) \subset \mathbb{R}^2 .$$

Nun halten wir y konstant ($y = y_0$) und fassen nur noch x als Variable auf. Die so erhaltene Funktion einer Variablen

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

heisst eine partielle Funktion von f.



Wir bezeichnen diese Funktion im folgenden meist mit φ (genauer wäre φ_{y_0}, mit einem expliziten Hinweis auf y_0, doch ist diese Bezeichnung zu umständlich). Also:

$$\boxed{\varphi(x) = f(x, y_0) .}$$

Entsprechend definiert man die partielle Funktion in Richtung y durch x_0:

$$y \mapsto f(x_0, y) ,$$

wobei also jetzt x konstant ist ($x = x_0$) und y variiert. Wir bezeichnen diese partielle Funktion im folgenden mit ψ:

$$\boxed{\psi(y) = f(x_0, y) \ .}$$

1. Es sei $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$. Zeichnen Sie in der x-y–Ebene alle Punkte ein, für welche f nicht definiert ist. Zeichnen Sie die Niveaulinien für die Niveaus $c = \pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2.

2. Es sei $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{y}$, $(y > 0)$. Bestimmen Sie die partiellen Funktionen für $x = -1,\ 0,\ 1$ und für $y = 1,\ 2,\ 3$. Zeichnen Sie eine räumliche Skizze.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.