20. UNEIGENTLICHE INTEGRALE

* improper integral (en)
* **uneigentliche** Integrale nicht mit **unbestimmten** Integralen verwechseln:
* bestimmte Integrale (mit Grenzen, ist eine Zahl) vs unbestimmte Integrale (ohne Grenzen, ist Funktion (Stammfunktion)): das gehört zusammen.
* Bei un**eigentlichen** Integralen geht es um etwas ganz anderes:

Vorbereitung: wie entscheiden: $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) =?$

Paar Regeln aus der Mathematik; wenn $x \to \infty, c > 0$ konstant; wie rasch wachsen $x!$, e^x , x^c , $\ln(x)$?

3 Beispiele:

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{1000}} =$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x =$

NB: von de l'Hospital mit $x > 0$: $\lim_{x\to 0} x\ln(x) =$

Erster Problemtyp (vgl p+1 & p+2): wir integrieren über ein unendlich langes Intervall

bisher: $\int_a^b f(x)dx$, wo f stetig und a, b endlich und fest.

jetzt: $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ - wie geht das?

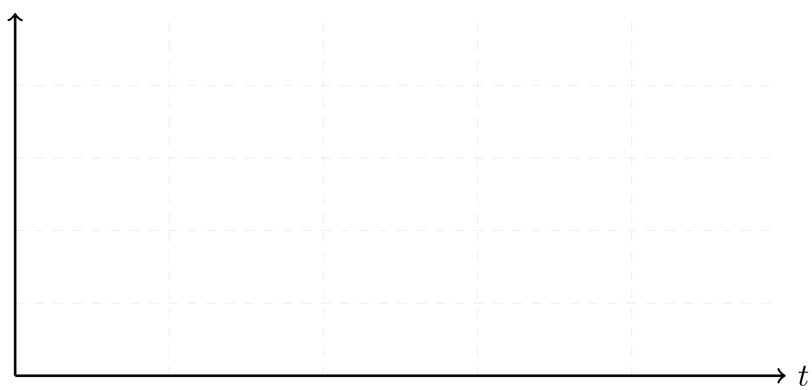
Wir *definieren* (!) : $\int_a^\infty f(x)dx :=$

Wie geht wohl das analoge nach links? $\int_{-\infty}^b f(x)dx :=$

Diese Definitionen machen anschaulich und mathematisch Sinn.

Beispiel aus der Physik (Zeit bis Isotop zerfällt, Dichtefunktion, Begründung mündlich, mehr in MAT 183 und im Physikunterricht):

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$



Jetzt sogar von $-\infty$ bis $+\infty$: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ - wie sollen wir das definieren?

3 Seiten weiter hinten werden wir $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ berechnen - gibt das etwa 0, aus Symmetriegründen?

Von früher: wenn a und b endlich, dann

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

für alle $c \in \mathbb{R}$, meist $c \in [a, b]$.

Jetzt zur entscheidenden Definition:

Wenn für jede Wahl von c die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \text{ und } \int_c^{\infty} f(x)dx$$

existieren - das heisst im Intervall $(-\infty, +\infty)$ sind, weder $-\infty$ noch $+\infty$, nämlich endlich,

Dann sagen wir (vgl Mathematik-Studium):

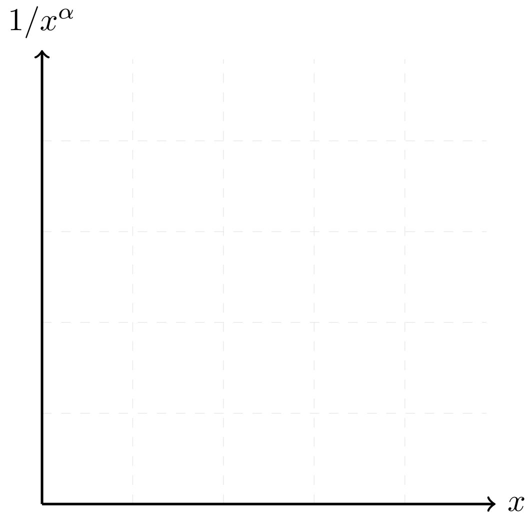
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

für beliebiges c - es gibt immer das gleiche.

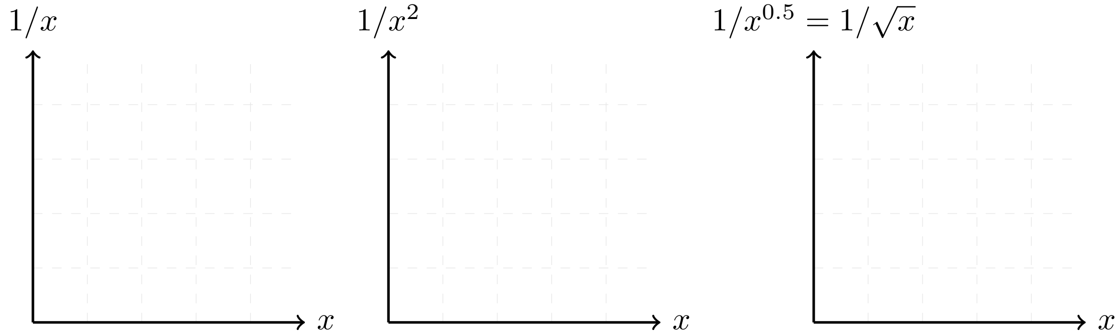
Sonst sagen wir, dass das Integral nicht definiert ist.

Zweiter Problemtyp: Funktionswert strebt selber gegen ∞

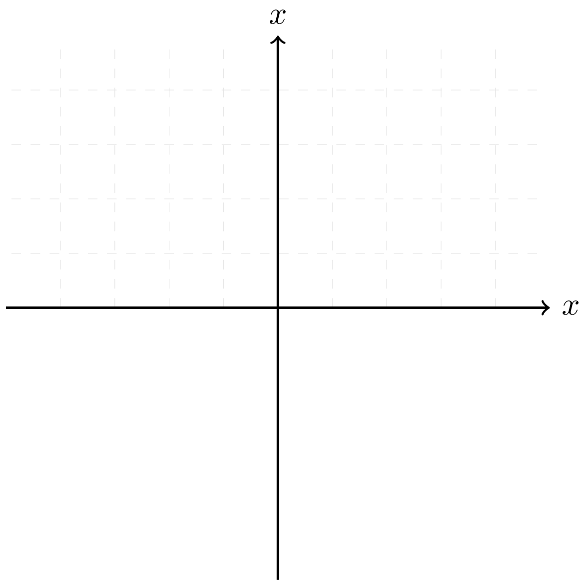
Vorbereitung: wie zeichnet man korrekt Hyperbeln $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$?



Die Merkregel für (fast) alle Fälle:



$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$?



Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

www.3blue1brown.com/lessons/l-hopitals-rule

Erster Problemtyp (unendlich langes Intervall):

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx$$

Wenn für jede Wahl von c die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \text{ und } \int_c^\infty f(x)dx$$

existieren - das heisst im Intervall $(-\infty, +\infty)$ sind, weder $-\infty$ noch $+\infty$, nämlich endlich,

Dann sagen wir (vgl Mathematik-Studium):

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

für beliebiges c - es gibt immer das gleiche.

Sonst sagen wir, dass das Integral nicht definiert ist.

Zweiter Problemtyp (Polstellen; dh Funktionswert strebt gegen ∞):

Wenn zum Beispiel Polstelle bei 0:

$$\int_0^a f(x)dx := \lim_{t\searrow 0} \int_t^a f(x)dx$$

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Welche der folgenden Aussagen beschreibt korrekt, welche Funktionen schneller wachsen als andere, wenn x gegen unendlich geht? Dabei bedeutet $A << B$, dass A langsamer wächst als B.

A) $\sqrt{x} << x! << e^x << \ln(x)$
B) $\ln(x) << \sqrt{x} << x! << e^x << x^c$
C) $\sqrt{x} << \ln(x) << e^x << x!$

D) $\ln(x) << \sqrt{x} << e^x << x!$

Frage 2: Gegeben die Reihenfolge des Wachstums: $\ln(x) << \sqrt{x} << e^x << x!$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = ?$

A) 0

B) ∞

Frage 3: Gegeben die Reihenfolge des Wachstums: $\ln(x) << \sqrt{x} << e^x << x!$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = ?$

A) 0

B) ∞

Frage 4: Gegeben die Reihenfolge des Wachstums: $\ln(x) << \sqrt{x} << e^x << x!$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = ?$

A) 0

B) ∞

Frage 5: Gegeben die Reihenfolge des Wachstums: $\ln(x) << \sqrt{x} << e^x << x!$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x!} = ?$

A) 0

B) ∞

Frage 6: Wie wird das Integral $\int_0^\infty f(x)\, dx$ definiert?

A) $\int_0^\infty \lim_{x\to\infty} f(x)\, dx$

B) $\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty f(x)\, dx$

C) $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\, dx$

Frage 7: Wie wird das Integral $\int_{-\infty}^0 f(x)\, dx$ definiert?

A) $\int_{-\infty}^0 \lim_{x\to-\infty} f(x)\, dx$

B) $\lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^0 f(x)\, dx$

C) $\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)\, dx$

Frage 8: Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ ist definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx,$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen:

Frage 1: D) $\ln(x) << \sqrt{x} << e^x << x!$; Frage 2: B) ∞; Frage 3: B) ∞; Frage 4: B) ∞; Frage 5: A) 0; Frage 6: C) $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\, dx$; Frage 7: C) $\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)\, dx$; Frage 8: Wahr.