2. VEKTORRECHNUNG MIT KOORDINATEN

(2.2) Das kartesische Koordinatensystem

Wir wählen im Raum einen Nullpunkt O und ein rechtwinkliges (statt "rechtwinklig" sagt man auch "kartesisch", nach R. Descartes (latinisiert Cartesius) (1596–1650)) Koordinatensystem mit x–Achse, y–Achse und z–Achse, die wie üblich angeordnet sein sollen:

(2.3) Die Koordinaten eines Vektors

(2.4) Rechenoperationen mit Koordinaten

In Kapitel 1 haben wir die Rechenoperationen für Vektoren geometrisch definiert. Wie kann man nun diese Operationen unter Verwendung der Koordinaten rechnerisch durchführen? In der folgenden Tabelle stellen wir gleich die Antwort zusammen.

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

(1)
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix},$$

(2)
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix},$$

(3)
$$r\vec{a} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix},$$

(4)
$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \,,$$

(5)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gelten folgende Formeln:

(6) Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ ist gegeben durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

(7) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,.$$

Bemerkungen / Erklärungen:

(2.5) Beweise für ein paar Rechenregeln

$\boxed{\text{(2.6) Länge eines Vektors in allen Dimensionen; Kreis-/Kugelgleichung}}$

en passant: Kreis-/Kugelgleichung

(2.7) Ein paar Beispiele

Abstand, Winkel

Flächeninhalt Dreieck, Parametergleichung Gerade

Ebenengleichung

Zum Schluss www.youtube.com/watch?v=gfWpNCFjgfY

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

Abgesehen von ein paar trivialen Regeln gelten:

(4)
$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \; ,$$

(5)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

(6) Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ ist gegeben durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \; .$$

(7) Der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \; .$$

Kreisgleichung $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

Kugelgleichung $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$

Fläche Dreieck berechnen mit Länge Vektorprodukt durch 2.

Für den Normalenvektor zur Ebene gilt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow ax + by + cz = d.$$

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren und r ein Skalar. Welche der folgenden Operationen haben wir bisher kennengelernt?

- $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}$
- $r\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\times\vec{b}$
- $\vec{a}/\vec{b}$
- $r+\vec{a}$

Frage 2: Der Vektor $\vec{a}=(3,4)$ hat die Länge 5? Wahr oder Falsch

Frage 3: Alle Punkte (x,y) auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(4,9)$ und Radius 2 erfüllen die Gleichung $4=(x-4)^2+(y-9)^2$? Wahr oder Falsch

Frage 4: $144=(x-12)^2+(y+12)^2+z^2$ ist

- keine Kugelgleichung.
- die Kugelgleichung für die Kugel mit Mittelpunkt $(12,-12,0)$ und Radius 144.
- die Kugelgleichung für die Kugel mit Mittelpunkt $(-12,12,0)$ und Radius 144.
- die Kugelgleichung für die Kugel mit Mittelpunkt $(12,-12,0)$ und Radius 12.
- die Kugelgleichung für die Kugel mit Mittelpunkt $(-12,12,0)$ und Radius 12.

Lösungen zu den Klickerfragen: Frage 1: $\vec{a}/\vec{b}$ und $r+\vec{a}$ wurden (mit gutem Grund) nicht definiert; Frage 2: Wahr. $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$; Frage 3: Wahr, Kreisgleichung; Frage 4: die Kugelgleichung für die Kugel mit Mittelpunkt $(12,-12,0)$ und Radius 12.