Nach diesem Kapitel behandeln wir zuerst Kapitel 22 und 23 und fahren dann je nach Zeit mit Kapitel 19 fort. Also bitte Unterlagen entsprechend mitbringen.

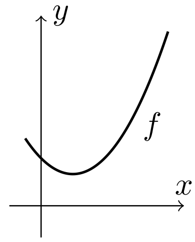
# 18. EINIGE WICHTIGE FUNKTIONEN UND IHRE ANWENDUNGEN

(18.2) Modifikation einer Funktion

Viele Abhängigkeiten in Natur und Technik werden nicht durch Funktionen in ihrer Reinform beschrieben, das heisst nicht mit Funktionen wie

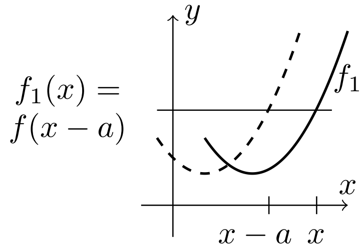
$$x^2, e^x, \sin(x)$$

und so weiter. Stattdessen müssen diese Funktionen im Normalfall der Realität noch angepasst werden. Die nachfolgenden Modifikationen von Funktionen müssen Sie für Ihr Studium aus dem Stand heraus beherrschen. Sie sind auch häufig in Aufgabe 1 an der Prüfung anzutreffen!



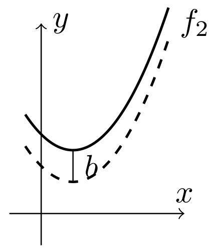

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ und ihren Graphen, der durch die Beziehung $y = f(x)$ gegeben ist. Wir modifizieren nun diese Beziehung auf verschiedene Arten und sehen, was herauskommt.

a) <u>Verschiebung in $x$–Richtung</u>



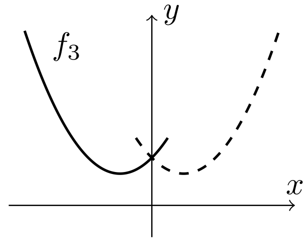

Wir setzen $f_1(x) = f(x-a)$ für $a > 0$. Der Graph von $f_1$ ist gegenüber dem Graphen von $f$ um die Strecke $a$ nach rechts verschoben. Entsprechend liefert $f(x+a)$, $a > 0$ eine Verschiebung nach links.

b) Verschiebung in $y$–Richtung



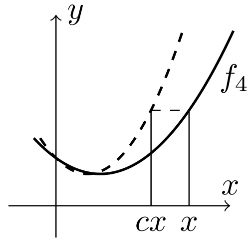

Nun sei $f_2(x) = f(x) + b$ für $b > 0$. Hier wird der Graph von $f$ um $b$ nach oben verschoben. Analog ergibt $f(x) - b$, $b > 0$, eine Verschiebung nach unten.

c) Spiegelung an der $y$–Achse




Der Graph der Funktion $f_3(x) = f(-x)$ wird durch Spiegelung von $f$ an der $y$–Achse erhalten.

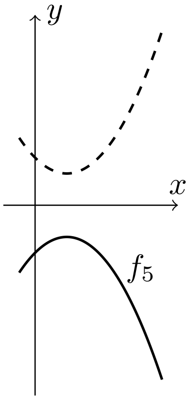
d) Streckung/Stauchung in $x$–Richtung




Es sei $c > 0$. Wir untersuchen $f_4(x) = f(cx)$. Der Wert von $f_4$ an der Stelle $x$ ist gleich jenem von $f$ an der Stelle $cx$. Deshalb entspricht der Übergang von $f$ zu $f_4$ einer Streckung in $x$–Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{c}$. (Für $c > 1$, also $\frac{1}{c} < 1$ handelt es sich anschaulich um eine “Stauchung”.)

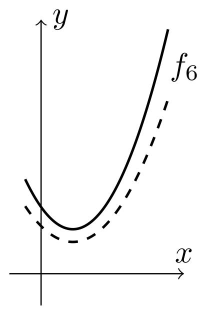
Ist $c < 0$, so kommt gemäss c) zur Streckung um $\frac{1}{|c|}$ eine Spiegelung an der $y$–Achse hinzu.

e) Spiegelung an der $x$–Achse




Dieser Übergang wird durch $f_5(x) = -f(x)$ geleistet.

f) Streckung/Stauchung in $y$–Richtung




Es sei $s > 0$. Wir untersuchen $f_6(x) = sf(x)$. Der Wert von $f_6$ an der Stelle $x$ ist das $s$–fache des Werts von $f(x)$. Der Übergang von $f$ zu $f_6$ besteht in einer Streckung ($s > 1$) (oder Stauchung ($s < 1$)) in $y$–Richtung.

Für $s < 0$ kommt gemäss e) eine Spiegelung an der $x$-Achse hinzu.

Diese verschiedenen Modifikationen können natürlich auch kombiniert werden; im Extremfall zu

$$g(x) = sf\big(c(x-a)\big) + b\ .$$

In (18.3) wird dieses Thema aufgenommen.

Wir wollen noch kurz die fehleranfälligen Fälle a) und d) genauer anschauen:

a) Mit $a > 0$, zum Beispiel $a = 2$ (allgemeiner Didaktiktipp: wenn Sie etwas nicht verstehen, **setzen Sie konkrete Zahlen ein**), könnte man in $f_1(x) := f(x-a)$ meinen, dass es wegen "$-a$" um $a$ nach links ("kleiner", Minuszeichen) gehen muss. Richtige Sicht: Man muss um $a = 2$ nach rechts gehen, um die gleichen Werte wie vorhin zu erhalten, weil ja $a = 2$ gleich wieder abgezogen wird:

d)

Didaktische Schlussbemerkung: solche Sachen immer mit positiven (d.h. $> 0$) $a, c$ prüfen, optimal sogar alles $> 1$, im 1. Quadrant.

(18.3) Periodische Funktionen

Wozu trigonometrische Funktionen:

* Aus der Geometrie (Dreieck) wie im Gymnasium eingeführt.
* unerwartet: zur Integration (vgl Kapitel 17).
* hochmathematisch: periodisch, und damit Bausteine für alle "vernünftigen" periodischen Funktionen, siehe gleich nachfolgend.

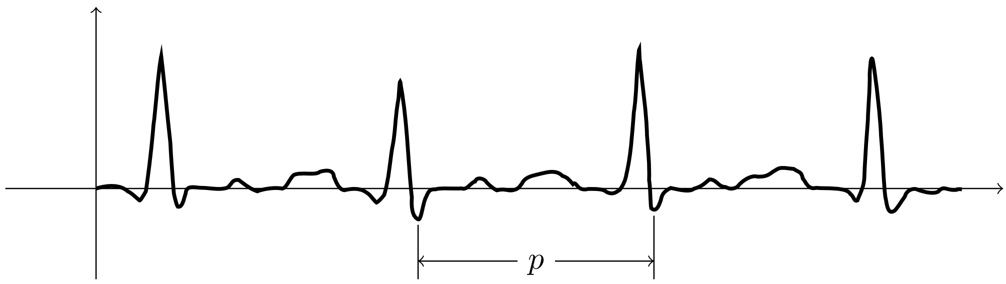
Es gilt bekanntlich für alle $x \in \mathbb{R}$ (wir verwenden wie üblich das Bogenmass)

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \ .$$

Ganz allgemein nennt man eine Funktion $f$ *periodisch*, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x + p) = f(x)$ für alle $x$.

Für die Sinusfunktion kann man $p = 2\pi$ wählen, es wäre aber auch $p = 4\pi, 6\pi$ usw. möglich. Die kleinste positive Zahl $p$ mit der erwähnten Eigenschaft heisst die *Periode* von $f$ (im Fall der Sinusfunktion also $p = 2\pi$).

Periodische Vorgänge sind ja in der Natur sehr häufig (man denke an Schwingungsvorgänge, Biorhythmen oder dergleichen). Somit treten periodische Funktionen in ganz natürlicher Weise auf. Als konkretes Beispiel erwähnen wir das Elektrokardiogramm, das man (mit einer gewissen Idealisierung) als Darstellung einer periodischen Funktion betrachten kann.




Zunächst scheint diese Kurve überhaupt nichts mit trigonometrischen Funktionen zu tun zu haben. Es gibt aber einen wichtigen mathematischen Satz, der besagt, dass jede einigermassen "vernünftige" periodische Funktion $f$ als eine sogenannte *Fourierreihe*, nämlich als unendliche Reihe der Form

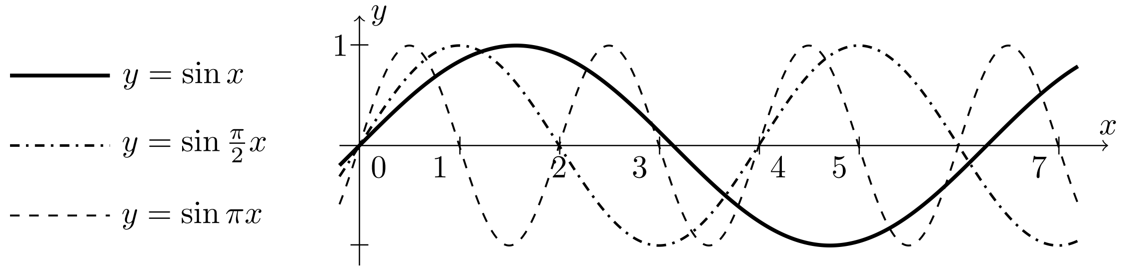
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dargestellt werden kann. (Die durch die obige EKG-Kurve gegebene Funktion wäre z.B. bereits "vernünftig" genug!) In dieser Formel wird vorausgesetzt, dass $f$ die Periode

$2\pi$ hat, was durch eine Massstabsänderung leicht erreicht werden kann (siehe unten). Wir können hier nicht näher auf diese Fourierreihen eingehen. Wir erwähnten sie, um zu zeigen, dass die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen weit über die Dreiecksberechnung hinausgeht, bilden sie doch gemäss den obigen Bemerkungen sozusagen Bausteine der periodischen Funktionen.

Periode $p$ und Frequenz $f$:

Von $2\pi$ zur beliebigen Periode $p$:




Der Sinus wird also zunehmend gestaucht; die y-Werte kommen neu früher. Wie ist neu die Periode?

Beweis:

Kontrollrechnungen zu oben:

Parallele Verschiebung:

Neue Amplitude:

Beispiel (mögliche Prüfungsfrage); gesucht ist eine periodische Funktion $h$ mit folgenden Eigenschaften:

- Periode 48 (Stunden),
- eine Nullstelle (mit wachsender Funktion) für $x = 12$,
- Amplitude 6.

**Wellenlänge vs Periode:** Wellenlänge ist die Länge der Welle in Metern; Periode ist die Schwingungsdauer in Sekunden!

Im Buch kommen hier nochmals die Exponentialfunktion, der radioaktive Zerfall und die C14-Methode vor - bitte nochmals **gründlich** lesen. Dann kommen die hyperbolischen Funktionen und die Area-Funktionen - bitte einfach **einmal gelesen haben**. Danach folgt wichtiger, einfach verdaulicher Stoff in (18.9); bitte auch hier gut lesen.

## (18.10) Logarithmische Skalen

Wichtig für die Anwendungen in den Naturwissenschaften sind dann die logarithmischen Skalen - sie werden sehr ausführlich im Buch dargestellt. Das Wichtigste nachfolgend. Logarithmenpapier erhält man auf

http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmenpapier

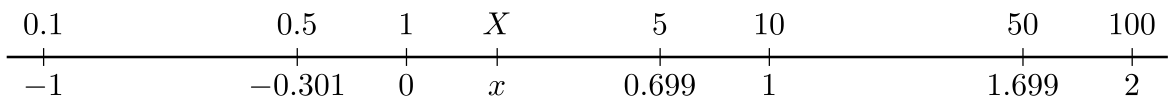
1. Zuerst ein paar Bemerkungen zu Notationen, Bezeichnungen, Motivation:

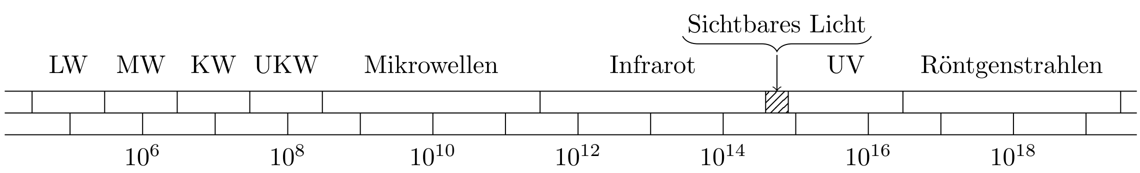
"*halb*logarithmisch" ist das gleiche wie "*einfach*logarithmisch" (historischer Fehler bei der Benennung, sorry); der Gegensatz ist dann *doppelt*logarithmisch.

Warum Log-Skalen:
1. In den Naturwissenschaften hat man oft Messungen, die von Natur aus grösser 0 sind (Gewichte, Längen) und die zudem einen riesigen Bereich abdecken (vgl Frequenzen p+1). Der Logarithmus ist für Zahlen $> 0$ definiert und im logarithmischen Massstab wird das Ganze dann sehr kompakt dargestellt (Physik bleibt gleich - es ist nur eine Darstellungsfrage).
2. Wenn man einen 2-dimensionalen, funktionalen Zusammenhang hat, kann man durch geschickte Transformationen einen exponentiellen bzw Potenzzusammenhang als linearen Zusammenhang darstellen (Physik bleibt gleich).

Nebenbemerkung: In MAT 183 werden wir lernen: die Logarithmus-Transformation macht man fast nur bei sogenannten Verhältnisskalen.

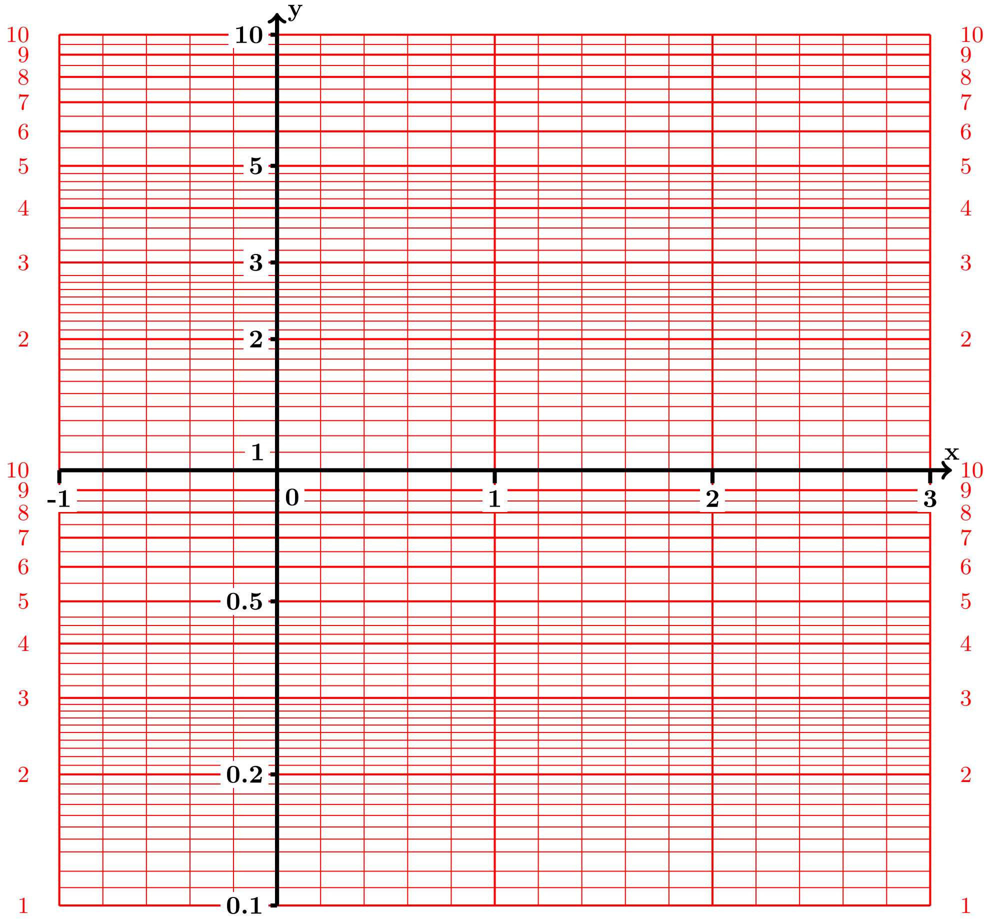
2. Eindimensional



3. Zweidimensional I: exponentielles (oder geometrisches) Wachstum:

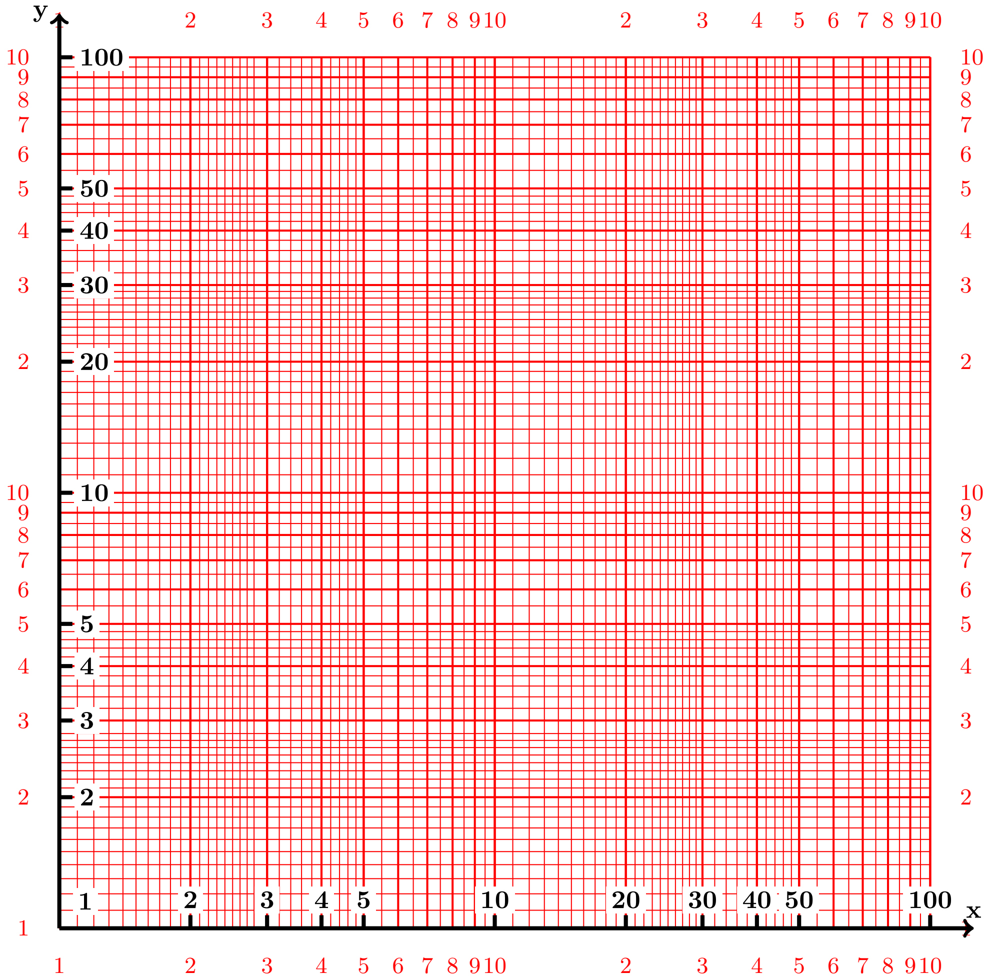
$y$-Werte logarithmiert, $x$-Werte (hier $t$-Werte) gleich $\Rightarrow$ exponentielles Wachstum wird *in der Darstellung* (!) linear.


y
x
10
5
3
2
1
0.5
0.2
0.1
-1
0
1
2
3

Dazu: Corona 2020-Ausbruch: die kleinen, feinen Unterschiede...

4. Zweidimensional II: Potenzzusammenhänge:

*x- und y*-Werte logarithmiert $\Rightarrow$ Potenzzusammenhänge werden *in der Darstellung* (!) linear.




Beispiel, reale Daten: https://schweizermonat.ch/die-berechnung-der-langsamkeit/

5. Schlussbemerkungen

Von all diesen Zusammenhängen gilt auch die Umkehrung:

* einfachlog ($y$-Werte logarithmiert) und Gerade $\Leftrightarrow y = Ke^{\lambda t}$ (exponentiell)
* doppeltlog und Gerade $\Leftrightarrow y = Kx^n$ (Potenzzusammenhang)

Didaktiktipp: Optimal Datentransformationen (zum Beispiel Logarithmieren) begründen: "Weil wir exponentielles Wachstum haben, logarithmiere ich hier die $y$-Werte."

Allgemeine Bemerkungen zu Graphiken in Vorträgen (nicht nur im Zusammenhang mit logarithmischen Skalen)

* Bitte Achsen beschreiben inkl Nullpunkt und Einheiten
* wenn möglich keine 3D-Darstellungen
* ist eine Tabelle nicht besser?

Dann: Zuschauer viel Zeit lassen, sich zu orientieren, Hilfestellungen der Art: die x-Achse ist..., die y-Achse beschreibt / diese Region / wenn alle Punkte auf der 45-Grad-Winkelhalbierenden wären, dann hiesse das / der extreme Punkt hier bedeutet .... , dieser andere extreme Punkt / sie als StudentInnen von 22 Jahren und Einkommen der Eltern von ... würden also dann in 20 Jahren etwa hier zu liegen kommen (Emotionen erhöhen Aufmerksamkeit) / das letzte Zahlen-Beispiel finden Sie jetzt hier als diesen Punkt / diese beiden Punkte haben den gleichen x-Wert aber ganz andere y-Werte. Das liegt wohl daran, dass / Bei logarithmischen Skalen, viel Zeit lassen; vor allem wegen Wert 0 und negativen Werten

Mehr dazu auf www.acad.jobs/docs/vortragstipps.html .

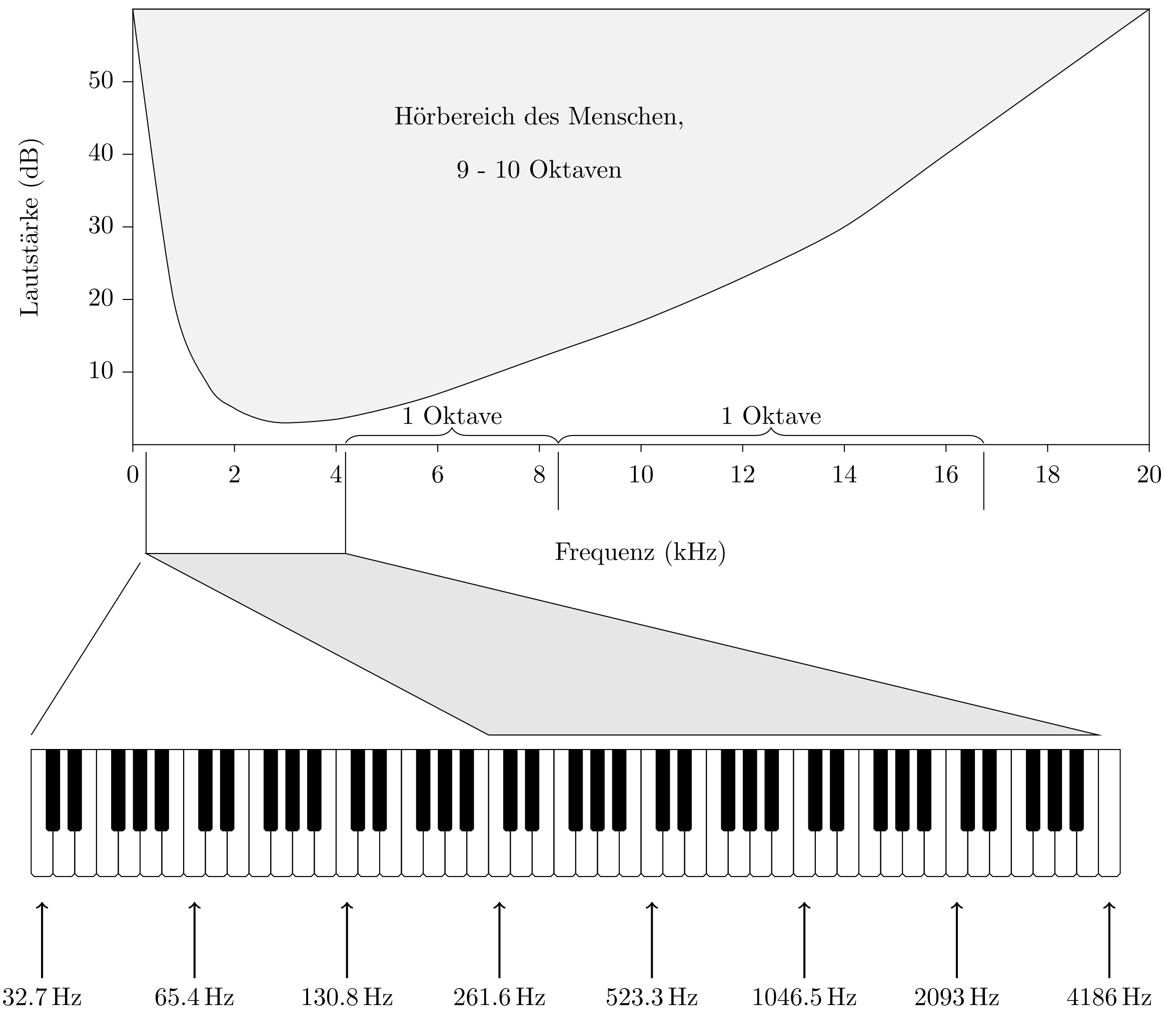
Wichtige Beispiele zu logarithmische / exponentielle Zusammenhänge

Das didaktische Ziel ist, dass Sie ein Gefühl für logarithmische / exponentielle Zusammenhänge bekommen.

1. Tonhöhe: Wahrnehmung (Oktave) vs Physik (Frequenzen); im Wesentlichen folgender Zusammenhang (diese Relativierung "wesentlicher Zusammenhang" gilt für alle nachfolgenden Beispiele, da es überall zu viele Details hat):

www.youtube.com/watch?v=8BqnN72OlqA (Donald Duck in Mathmagic Land; Musik ab Minute 2.50)
www.tinnitracks.com/de/tinnitus/frequenz

Logarithmisches Empfinden erlaubt riesigen Bereich abzudecken. Macht Sinn für den jungen und gesunden Menschen: 40-20'000 Hz - Survival of the fittest: die Töne in unserer damaligen Umwelt waren in diesem Bereich (z.B. Wale hören höher im Meer - hat für uns an Land keinen Sinn gehabt).




Rachearie; Höhepunkt bei Minute 1.04: www.youtube.com/watch?v=-quQHNriV-Q

`https://en.wikipedia.org/wiki/Florence_Foster_Jenkins_(film)` sehr gut

`https://en.wikipedia.org/wiki/Marguerite_(2015_film)` noch besser

https://schweizermonat.ch/mozarts-hoehepunkt/

2. Zum umgangssprachlichen Synonymgebrauch von *logarithmische* vs *exponentielle* Zusammenhänge

3. Richterskala bei Erdbeben; im Wesentlichen folgender Zusammenhang:

4. Die barometrische Höhenformel und der Absturz von Air-France-Flug 447; im Wesentlichen folgender Zusammenhang:

Kolumne dazu von mir im Schweizer Monat:
https://schweizermonat.ch/10-000-meter-900-km-h/
und weitere Artikel:
https://en.wikipedia.org/wiki/Barometric_formula
http://de.wikipedia.org/wiki/Air-France-Flug_447

5. pH-Wert:

https://schweizermonat.ch/ph-wert-was-die-zahl-auf-ihrer-hautcremetube-bedeutet/

**Wichtig:**

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.

2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.

3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).

4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).

5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.