E. AUSBAU DER INFINITESIMALRECHNUNG

17. UMKEHRFUNKTIONEN (INVERSE FUNCTION)

(17.2) Zyklometrische Funktionen

a) Einleitung

Oft stellt sich die Aufgabe, zu einem gegebenen Wert einer trigonometrischen Funktion, z.B. dem Sinus, den zugehörigen Winkel (hier stets im Bogenmass gemessen) zu bestimmen. Anders formuliert: In der Gleichung

$$y = \sin x \tag{1}$$

ist y gegeben und x gesucht, d.h., wir müssen diese Gleichung nach x auflösen.

Zusammenfassend lässt sich in Worten sagen:

$$\arcsin y \text{ ist die Zahl aus } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \text{ deren Sinus } = y \text{ ist.}$$

Da also zu jedem y aus $[-1,1]$ eine eindeutig bestimmte Zahl $\arcsin y$ gehört, wird durch die Zuordnung

$$y \mapsto \arcsin y$$

eine neue Funktion definiert, die Arcussinus-Funktion, kurz der Arcussinus. Ihr Definitionsbereich ist das Intervall $[-1,1]$. Ganz analog erhält man zu den übrigen trigonometrischen Funktionen die neuen Funktionen Arcuscosinus, Arcustangens, Arcuscotangens (vgl. (17.2.c) bis (17.2.e)). Man fasst diese Funktionen unter den Namen *zyklometrische Funktionen* oder *Arcus-Funktionen* zusammen. Wir untersuchen noch einige weitere Eigenschaften des Arcussinus.

Definitionsgemäss bedeuten für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $y \in [-1,1]$ die Aussagen $y = \sin x$ und $x = \arcsin y$ dasselbe. Formelmässig ausgedrückt:

(2) $$y = \sin x \Longleftrightarrow x = \arcsin y \ .$$

In einer solchen Situation spricht man von *Umkehrfunktionen* oder von inversen Funktionen (vgl. (17.3)). Man sagt, der Arcussinus sei die Umkehrfunktion des Sinus (oder die zum Sinus inverse Funktion) und umgekehrt.

Was geschieht, wenn man zwei zueinander inverse Funktionen zusammensetzt? Ersetzt man in der Formel $y = \sin x$ die Zahl x durch $\arcsin y$, was wegen (2) zulässig ist, so erhält man

(3) $$y = \sin(\arcsin y), \quad (y \in [-1,1]) \ .$$

Ebenso kann man in $x = \arcsin y$ für y den Wert $\sin x$ einsetzen und findet

(4) $$x = \arcsin(\sin x), \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \ .$$

Zum Schluss dieser Überlegungen geben wir noch den Graphen der Arcussinus-Funktion an. Wir gehen aus von der Beziehung

(2) $$y = \sin x \Longleftrightarrow x = \arcsin y \quad \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ .$$

Der Graph der (auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten) Funktion $y = \sin x$ besteht aus allen Punktepaaren (x,y) mit $y = \sin x$, $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Wegen (2) beschreiben genau dieselben Punktepaare auch die Beziehung $x = \arcsin y$. Mithin haben $y = \sin x$ und $x = \arcsin y$ denselben Graphen. In der Darstellung $x = \arcsin y$ ist nun aber die unabhängige Variable nicht wie üblich x, sondern y, was ungewohnt ist. Um auf das vertraute Bild zu kommen, müssen wir also noch x und y vertauschen, was einer Spiegelung an der Geraden $y = x$ entspricht.

Somit wird der Graph der Arcussinus-Funktion erhalten, indem man den Graphen der auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten Sinusfunktion an der Geraden $y = x$ spiegelt:

Ganz entsprechende Überlegungen gelten für die übrigen zyklometrischen Funktionen; lesen Sie dazu bitte die restlichen Teile von (17.2) nach dieser Stunde im Buch.

Paar Punkte zum Taschenrechner TR (ohne Gewähr):

* TR in den Übungen JA; in der Prüfung? MAT 182: NEIN, MAT 183: JA

* Die Taste $\sin^{-1}$ ist normalerweise beim TR die Umkehrfunktion ("arcsin") und nicht der Kehrwert $\frac{1}{\sin(x)}$. Probieren Sie es bitte **vorher** aus!

* Allgemein ist f^{-1} die Umkehrfunktion und

$$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

der Kehrwert an der Stelle x.

* Kontrollieren Sie bei Ihrem eigenen TR die Umstellung Grad- und Bogenmass. Kontrolle: in Gradmass gilt $\sin(30°) = 0.5$ und in Bogenmass entsprechend $\sin(\pi/6) = 0.5$, da $30° \hat{=} \pi/6$.

(17.3) Umkehrfunktionen

Für die ausführlichen Definitionen und Hinweise lesen Sie bitte die Seiten im Buch. Wir besprechen hier

a) Was will man machen und was kann dabei schiefgehen?
b) Wie schränkt man sich dann ein, damit es nicht mehr schiefgeht?
c) Was kann man dann alles Schönes machen?
d) Berühmte Beispiele

a) Was will man machen und was kann dabei schiefgehen?

* $y = f(x)$, haben jetzt y und wollen x.

* Definitionsbereiche müssen stimmen: $10 = \sin(x)$.

* Es gibt eventuell mehrere x, wo $f(x) = y$ erfüllt ist, wenn y gegeben ist:

* Aus $y = x^2 = 1$ erhalten wir $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

* NB: beide Aussagen sind richtig: $\sqrt{9} = 3$ und die Gleichung $x^2 = 9$ hat als Lösungsmenge $L = \{-3, 3\}$. Es sind einfach zwei verschiedene Fragen und entsprechend zwei verschiedene Antworten!

b) Wie schränkt man sich dann ein, damit es nicht mehr schiefgeht?

* Definitionsbereiche prüfen: merkt man meist, ausser beim schlechten programmieren.

* Verwandtes Problem bei trigonometrischen Funktionen: Grad- versus Bogenmass nicht verwechseln.

* Lösung: Einschränken des Definitionsbereiches von $f : D(f)$, damit f sogenannt **injektiv, d.h. nur 1 Wert möglich "beim Zurückgehen" - englisch schön: one-to-one-map**

* Definition injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Zum Beispiel bei streng monotonen Funktionen immer erfüllt.

* injektiv/Umkehrfunktion: erlaubt oft Vereinfachungen in praktischen Rechnungen.

c) Was kann man dann alles Schönes machen?

d) Berühmte Beispiele

(17.4) Die Ableitung der Umkehrfunktion

Wir repetieren hier erstmal die Ableitungen von sinus, cosinus und Konsorten und ihrer Umkehrfunktionen. Diese sind in früheren Kapiteln zum Teil einfach ohne Begründung angegeben worden. Bald werden wir verstehen, warum diese so aussehen.

* Vom Gymnasium: $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $(\cos(x))' = -\sin(x)$

* Weil $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ erhält man mit Hilfe der Quotientenregel (entweder in den Übungen behandelt oder sonst als Hausaufgabe):

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

und

$$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x)).$$

Und wie hast Du's mit der Ableitung der Umkehrfunktion?

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\mathrm{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Operationell sind diese letzten 4 Zusammenhänge vor allem in der Gegenrichtung sehr gut zu gebrauchen: wenn Sie $\frac{1}{1+x^2}$ *integrieren* wollen, haben Sie jetzt die Stammfunktion (lese dritte Gleichung in Gegenrichtung). Solche Ausdrücke kommen in der Praxis vor! Wir werden gleich exemplarisch die erste Gleichung beweisen (p +3).

Graphische Darstellung zur Herleitung der Formel

Rechenbeispiele I:

Rechenbeispiele II:

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.