

Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I - Analysis" von Christoph Luchsinger und Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. Das Copyright ist bei Birkhäuser!

D. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DGL

15. DER BEGRIFF DER DIFFERENTIALGLEICHUNG (DIFFERENTIAL EQUATION)

Für viele StudentInnen war der bisherige Stoff reine Repetition (ausser Kapitel 8 und 14). Die jetzt folgenden DGL sind dagegen Neuland. DGL sind zentrales Modellierungsinstrument für die Natur- und Ingenieurwissenschaften und die Ökonomie. DGL sind deterministische Ansätze, die stochastischen (zufälligen) folgen dann im Frühlingsemester.

Neu und verwirrend bei DGL ist, dass alles in einer Gleichung ist: die Ableitung y' (die nach wie vor immer noch *auch* die Steigung des Graphen angibt), die Funktion y selber und das Argument x , zum Beispiel in der Form

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Was weiter irritiert ist, dass die Lösung eine Funktion $y(x)$ ist und nicht wie sonst eine Zahl. Zentral für die Anwendungswissenschaften ist auch das Aufstellen der DGL als solches. Das üben wir jetzt anhand von Anwendungen in Kapitel 15.

(15.0) Allgemeine Informationen zum radioaktiven Zerfall - nicht im Buch

Periodensystem mit Neutronenüberschuss bei den hohen Ordnungszahlen:

$$\frac{N}{Z} \doteq 1 + 0.015(N + Z)^{2/3}$$

Isotope zerfallen, wenn sie zu weit vom Stabilitätstal entfernt sind, durch α -Zerfall (ab $N + Z > 200$), β^- -Zerfall (wenn man zu viele Neutronen hat), β^+ -Zerfall (wenn man zu viele Protonen hat); γ -Strahlung ist dann Begleiter von obigem. Es gibt das obige Stabilitätstal.

Für die Motivation der ersten DGL, welche wir betrachten (15.3 a), interessieren wir uns zunächst für den *Zeitpunkt des Zerfalls eines Isotops*. Die Zeit bis zum Zerfall eines einzelnen, gegebenen Isotops ist zufällig, nicht vorhersehbar und gedächtnislos. Man spricht von spontanem Zerfall (spontaneous decay), bis ein stabiler Zustand erreicht ist. Die Atome zerfallen unabhängig voneinander (sofern keine Kettenreaktionen stattfinden). Wegen diesen physikalischen Erkenntnissen schliessen wir, dass von einem Kilogramm Pu239 eine gewisse Menge in der kommenden Stunde zerfallen wird. Wenn wir 2 Stunden warten, wird etwa die doppelte Menge zerfallen. Wenn wir zudem die Anfangsmenge verdoppeln (oder halbieren), dann wird doppelt (halb) so viel zerfallen. **Zusammengefasst ist die Abnahme der Menge Pu239 proportional zur Zeitdauer und zur aktuellen Menge.** Diese Erkenntnis lassen wir in den kommenden Seiten in die Modellierung einfließen.

Kurzer Exkurs zu Kernenergie/-waffen: die 2 zentralen Gründe, weshalb wir Kernenergie und Kernwaffen haben (erste Hälfte 20. Jhdt; gegen 2. Weltkrieg hin wurde klar, dass man damit eine Bombe bauen kann; historisches Pech für Japan):

* Wenn schwere Isotope gespalten werden, haben wir einen Neutronenüberschuss. Diese überschüssigen Neutronen können dann weitere Atome spalten, das ergibt die Kettenreaktion.

* Die Energie gewinnt man durch $E = mc^2$ (Albert Einstein) aus dem Massendefekt (die Teile sind leichter als die Ausgangsprodukte! - der Rest wurde in Energie umgewandelt; so etwas kommt in der Chemie per definition nicht vor (Massenerhaltungsgesetz)). Wir haben in diesem Zusammenhang folgende Kurve:

(15.3) Beispiele von Differentialgleichungen

a) Radioaktiver Zerfall

Kurze Repetition, wir brauchen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

oder besser mit der Zeit:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

a1) Modellierung

a2) Bemerkungen dazu

Welche Bedeutung hat nun das K in $y(t) = Ke^{-\lambda t}$? Man nehme $t = 0$ und erhält:

Bezeichnungen:

- * $N(0) = N_0$ heisst **Anfangsbedingung** AB
- * $N(t) = Ke^{-\lambda t}$ heisst allgemeine Lösung
- * $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ heisst spezielle Lösung mit AB $N(0) = N_0$.

Ein paar Bemerkungen zu exponentiellem bzw geometrischem Verhalten (nächste 6 Seiten)

Exponentiell vs Geometrisch, $e^{\lambda t}$, $e^{-\lambda t}$

Meine Kolumne im Schweizer Monat:

www.schweizermonat.ch/alles-waechst-exponentiell

Halbwertszeiten $T_{1/2}$ (half-life)

Und jetzt geht's aufwärts: Verdoppelungszeiten T_2

Nach einem Jahr Mathematikstudium kann man folgende Charakteristika von geom/exp Verhalten beweisen:

Konstante Zeit bis zur Verdopplung **genau dann wenn** wir exponentielles (stetig) oder geometrisches (diskret) Wachstum haben.

und analog

Konstante Zeit bis zur Halbierung **genau dann wenn** wir exponentiellen (stetig) oder geometrischen (diskret) Rückgang haben.

Weiter: Bei geometrischem oder exponentiellem Verhalten gilt: wenn man auf der x-Achse addiert/subtrahiert, dann wird bei der y-Achse multipliziert/dividiert.

Radioaktive Abfälle: falsche Vorstellungen und die Wahrheit dazu

ganz dumm: "nach 30'000 Jahren ist aller Abfall zerfallen": das sollten wohl 24'110 Jahre sein (Halbwertszeit Pu239) und eben: es ist nur die *Halbwertszeit* – > die (andere) Hälfte ist dann immer noch da!

leicht intelligenter: "in konstanten Zeiten halbiert sich die noch verbleibende Menge": das ist so, wenn man nur zum Beispiel Pu239 hat/betrachtet und sich kein neues Pu239 bildet. Dann könnte man argumentieren, dass das schnell gegen Null geht, weil $e^{-\lambda t}$ sehr schnell gegen 0 geht (diese letzte Aussage stimmt zwar so - es wäre aber immer noch sehr lange):

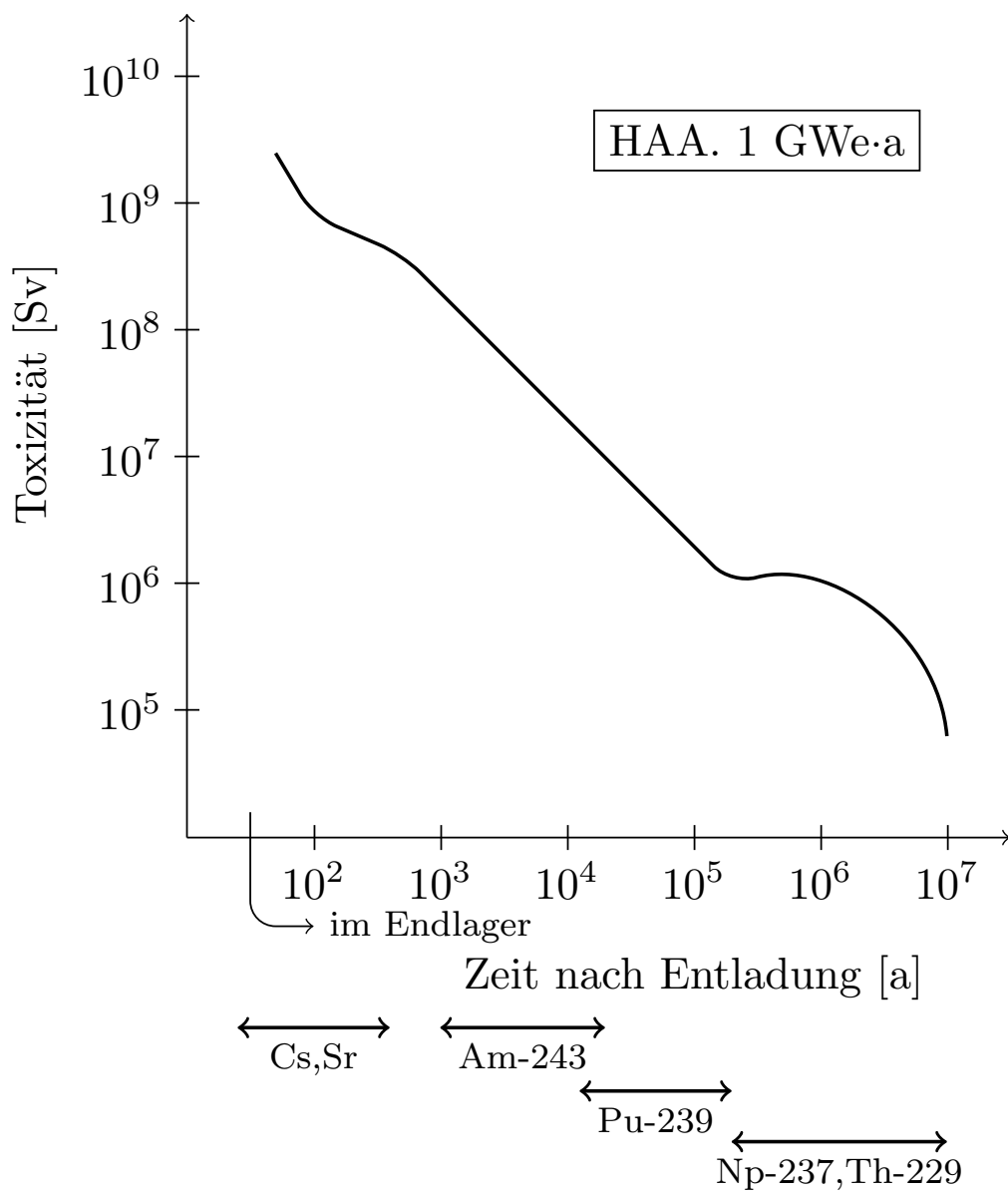
NB: Wenn man von "schnell gegen 0 gehen" spricht, dann meint man vor allem im Vergleich zu einem Potenzzusammenhang wie

$$\frac{1}{t^\alpha}$$

wo $\alpha > 0$. Potenzen (im Nenner) gehen in der Tat langfristig langsamer gegen 0!

Auf der nächsten Seite sehen Sie, wie Hochaktiver Abfall (HAA) aus der Jahresproduktion von 1 GW (elektrisch) zerfällt. Beachten Sie folgende 5 Punkte dieser Darstellung:

1. Durch Zerfallsreihen entstehen nacheinander immer wieder radioaktive Stoffe.
2. Man hat von Anfang an eine Mischung von diversen Radionukliden.
3. Es ist ein Doppelt-Logarithmischer Massstab. Da es jetzt mehr oder weniger eine Gerade ist, heisst das (vgl Kapitel 18), dass es in der Tat ein Potenzzusammenhang ist - also ein langsamer Rückgang.
4. Auf der y-Achse ist hier nicht die verbleibende Anzahl Isotope eingetragen, sondern die Toxizität in Sievert. Das berücksichtigt die Schädlichkeit für die Menschen: die Energie der Strahlung, ob α, β, γ -Strahler und welche Isotope (damit weiss man auch, in welche Organe die Isotope bei Einnahme gehen).
5. Wenn man statt *einem* Endlager die Menge auf 100 Endlager aufteilen würde (da spricht vieles dagegen), sinkt die Toxizität auch um den Faktor 100 (in 10er-logarithmischem Massstab um 2 Einheiten).



Die C-14-Methode zur Altersbestimmung (Nobelpreis: Willard Libby)

C12, C14 ($T_{1/2} = 5730$ Jahre, extrem selten)

$$y' = -\lambda y \quad \text{und} \quad \text{damit} \quad y(t) = Ke^{-\lambda t}$$

Pflanzen, Lebewesen (organischer Ursprung, "C")

C12 und C14 *biologisch* gleich

Pflanzen und Lebewesen bauen C12 und C14 ein;
wenn gestorben: C14 baut sich ab, während es sich
in der Atmosphäre durch kosmische Strahlung,
Spallation aus N14 erneuert.

Bei konkretem Fund: Verhältnis
C14 zu C12 messen und t finden (siehe Buch)

300 - 60'000 Jahre brauchbar, danach Nachweisgrenze
unterschritten

Probleme der Methode - bitte Details in der Fachliteratur nachschauen (ETH Höggerberg hat Expertise):

1. Verfälschungen durch Sonnenaktivität
2. Verfälschungen durch verbleibende Radionuklide der *Oberflächentests* mit Nuklearwaffen bis 1963: Durch die Kernwaffentests wurde bis 1963 die C14-Konzentration relativ zu C12 fast verdoppelt:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e2/Radiocarbon_bomb_spike.svg ■
3. Das Holz in alten Häusern liefert Zeit, wann der Baum gefällt wurde, nicht, wann das Haus gebaut wurde....
4. Verbrauch *fossiler* Energieträger steigert den Anteil von C14-freiem CO₂ (fossil ist alt und damit fast nur noch C12 vorhanden).
5. <https://schweizermonat.ch/wie-wissen-wir-dass-oetzi-5300-jahre-alt-ist>

Damit erstmal Schluss mit Folgerungen aus $e^{\lambda t}$.

Wir werden jetzt viele weitere Beispiele anschauen, in denen DGL als Modellierungsinstrumente sich aufdrängen. In Kapitel 15 wird dabei vor allem das Aufstellen der DGL geübt. Die Lösung der folgenden DGL wird - wenn überhaupt - in Kapitel 16 folgen.

b) Wachstum von Populationen

1) $N(t)$ = Anzahl Individuen zur Zeit t :

Luchse im Kanton Glarus

Gängige Annahme: *absolute* Zunahme

proportional zum aktuellen Stand, also:

2) unbeschränktes Wachstum (häufig) unrealistisch

festе obere Schranke $B, B > 0$ oft sinnvoll

”Trägerkapazität” des Habitats

$0 \leq N(t) \leq B$ und zwar:

3) Kombination obiger Ansätze:

Lsg im Buch: Sigmoidе Kurve (Spezialfall ist ”logistische” Kurve)

c) Ausbreitung einer Infektion (erstes, triviales Modell; vgl p+1)

G Gesunde, N Infizierte; $G + N = B$

keine Genesung, nicht tödlich, also B konstant

hier: infiziert = infektiös = krank und zwar sofort

Zwei didaktische Tips:

* von Infizierten ausgehen und

* "Infektion = Erfolg"

$N'(t)$ proportional zur Anzahl *genügend enger* Kontakte zwischen Gesunden G und Infizierten N

NB: "genügend enger" (Kontakt) ist eine praktische, gängige Formulierung in der mathematischen Epidemiologie und bedeutet einfach, dass es für eine Infektion reicht (HIV: Beischlaf, Covid19: anhusten, mittelalterlicher Aberglaube: Blickkontakt.)

Damit ist $N'(t)$ proportional zur Anzahl $N(t)$ Infizierter und Anteil Gesunden

$$\frac{B - N(t)}{B},$$

also

e) Bimolekulare Reaktionen (Molekül-Molekül-Reaktion)

a, b Konzentration von A, B am Anfang; $x(t)$ Konzentration von C zur Zeit t .

Massenwirkungsgesetz (Spezialfall mit 1 Reaktionsprodukt, 1. Semester Chemie):

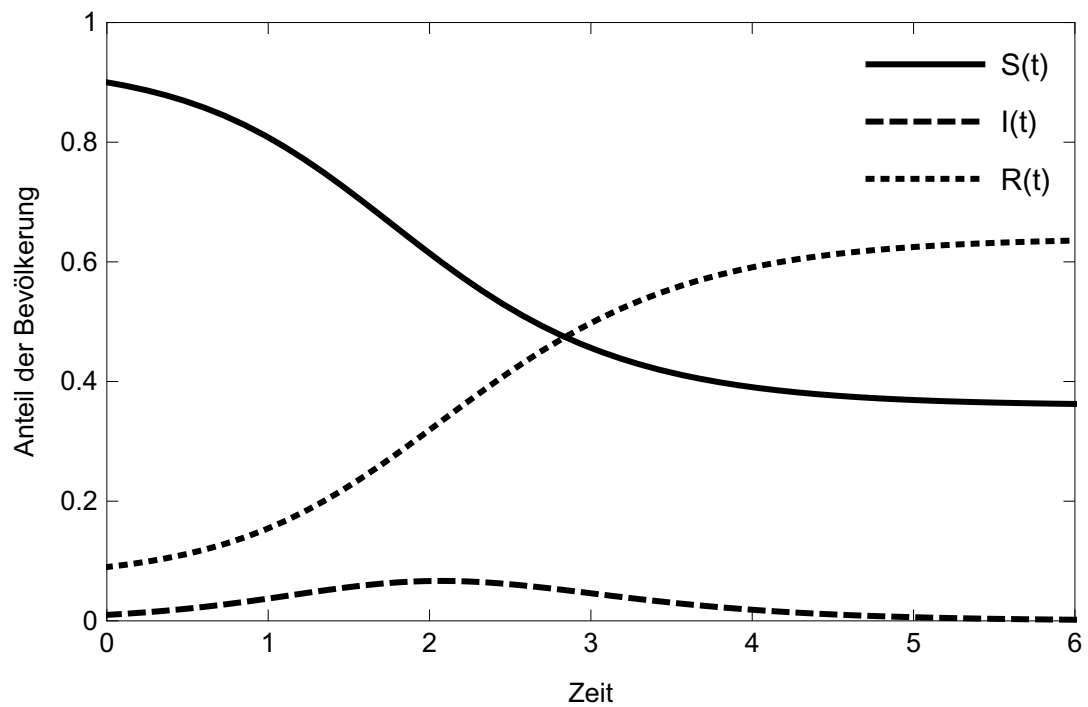
Beispiele zu DGL-Systemen:

Erraten Sie eine Lösung von:

SIR (Standardmodell, nicht direkt auf Corona anwendbar, nur numerisch lösbar)

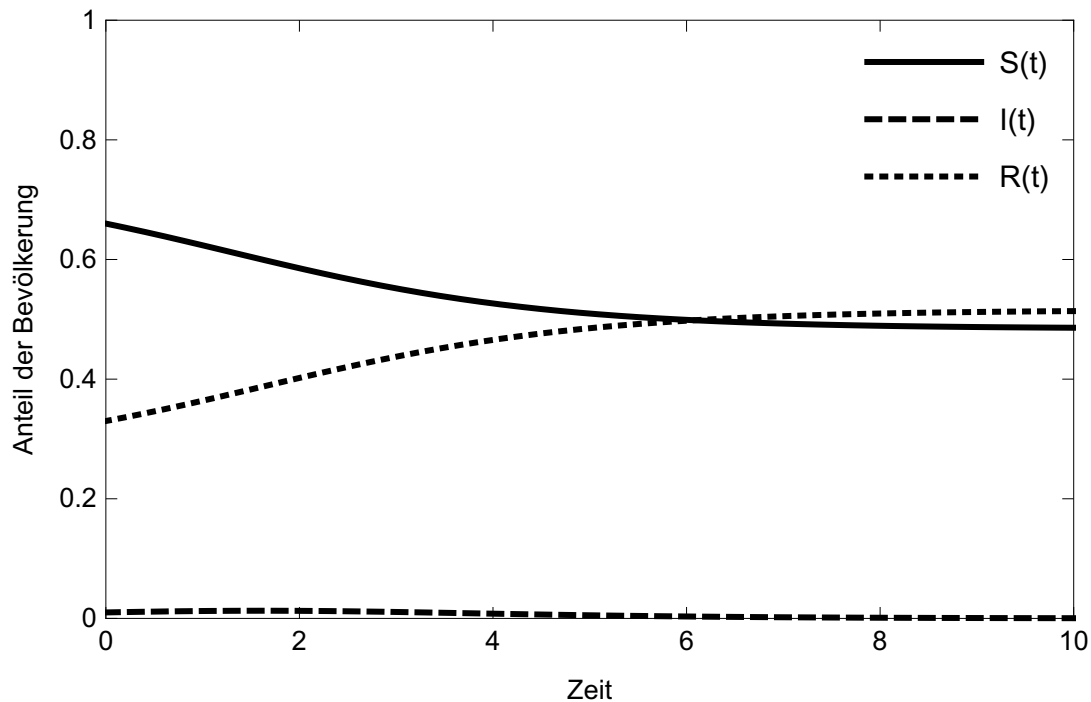
akademische Welt: $R_0 := \frac{\lambda}{\mu}$; sogenannte Basic Reproduction Ratio: Anzahl Nachkommen einer infizierten Person unter optimalen Bedingungen; d.h. $S(0) \doteq 1$.

Politik:



H.I.T: Herd Immunity Threshold:

zB extremes R_0 (vgl Wikipedia):



Dieses Thema (und viele andere aus Kapitel 15) kann man an Gymnasien, zum Beispiel in einer Arbeitswoche (Leistungskurs, Maturaarbeit) mit der Mathematik- oder Physiklehrkraft, durchaus behandeln.

Paar Hinweise Wissenschaftskommunikation:

- * MNF-relevant: Klima, Epidemien, KKW (Betrieb, Abfall)
- * Realität vs Modell (SIR) vs Simulation (siehe 2 Graphen oben)
- * Modellrisiko: $S > I > R$ oder $S > I > R$ und dann wieder nach S ?
- * versteht Publikum (Politik, Journalismus) Modellannahmen
- * Komplexitätsreduktion: “Haupteffekt ist”; “in diesem Vortrag/Artikel gilt.... (ausser wir thematisieren es explizit)” - aber die Aussage muss immer stimmen: Sie müssen als Wissenschaftler/in das letzte Wort haben!
- * www.reach.ch

www.luchsinger-mathematics.ch/as10.pdf

www.luchsinger-mathematics.ch/me.html

<https://schweizermonat.ch/wie-man-eine-epidemie-stoppt>

https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzer_Tod (zeigen)

Vortrag Christoph Luchsinger bei Science Alumni UZH, 15. April 2021:

<https://www.sciencealumni.uzh.ch/de/Veranstaltungsarchiv.html>

Lanchester-DGL: Once Upon a Time in the West vs High Noon - parallel oder seriell?

Mehr auf <https://schweizermonat.ch/wo-ist-frank/> .

Lotka-Volterra-Gleichungen (auch als Räuber-Beute-Gleichungen bekannt, freiwillig):
siehe Web oder angegebene alte Vorlesungen in Basel von Herrn Luchsinger.

Was könnte an der Prüfung zu DGL-*Systemen* kommen?

(15.4) Allgemeines über Differentialgleichungen

→ lesen im Buch

Was für DGL gibt es alles? Paar Hinweise:

* gewöhnliche und partielle (die zweiten machen wir nicht)

* 1. Ordnung mit y', y und 2. Ordnung mit y'', y', y (die zweiten machen wir nicht - ausser dass wir Lösungsvorschläge überprüfen oder konstante Lösungen suchen)

Die allgemeine Form einer expliziten DGL 1. Ordnung lautet $y' = F(x, y)$, wo F eine Funktion von zwei Variablen ist. Beispiele werden wir zur Genüge sehen, wie etwa

$$y' = \frac{2y}{x}$$

$$y' = x - y + 1, \quad \text{usw. .}$$

Wir halten hier noch formell fest, was man unter einer *Lösung* der Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ versteht: Eine Funktion $y = f(x)$ heisst Lösung dieser DGL, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich D gilt $f'(x) = F(x, f(x))$.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.