D. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DGL

15. DER BEGRIFF DER DIFFERENTIALGLEICHUNG (DIFFERENTIAL EQUATION)

Für viele StudentInnen war der bisherige Stoff reine Repetition (ausser Kapitel 8 und 14). Die jetzt folgenden DGL sind dagegen Neuland. DGL sind zentrales Modellierungsinstrument für die Natur- und Ingenieurswissenschaften und die Ökonomie. DGL sind deterministische Ansätze, die stochastischen (zufälligen) folgen dann im Frühlingssemester.

Neu und verwirrlich bei DGL ist, dass alles in einer Gleichung ist: die Ableitung y' (die nach wie vor immer noch *auch* die Steigung des Graphen angibt), die Funktion y selber und das Argument x, zum Beispiel in der Form

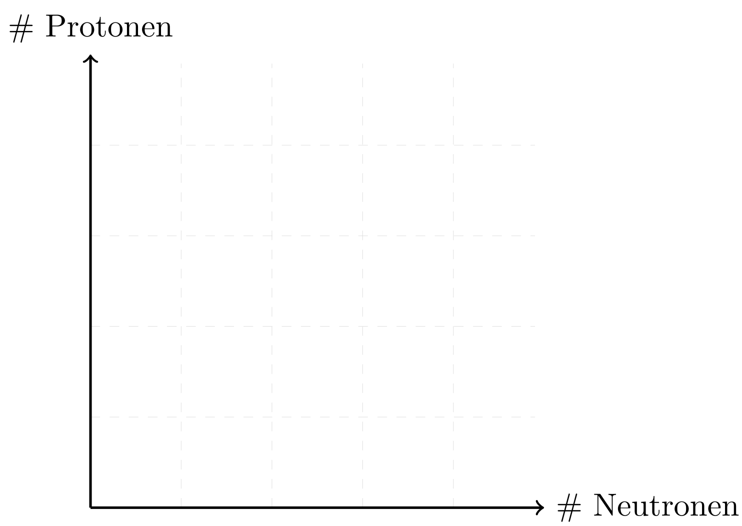
$$y' = \frac{y}{x}.$$

Was weiter irritiert ist, dass die Lösung eine Funktion $y(x)$ ist und nicht wie sonst eine Zahl. Zentral für die Anwendungswissenschaften ist auch das Aufstellen der DGL als solches. Das üben wir jetzt anhand von Anwendungen in Kapitel 15.

(15.0) Allgemeine Informationen zum radioaktiven Zerfall - nicht im Buch

Periodensystem mit Neutronenüberschuss bei den hohen Ordnungszahlen:

$$\frac{N}{Z} \doteq 1 + 0.015(N+Z)^{2/3}$$



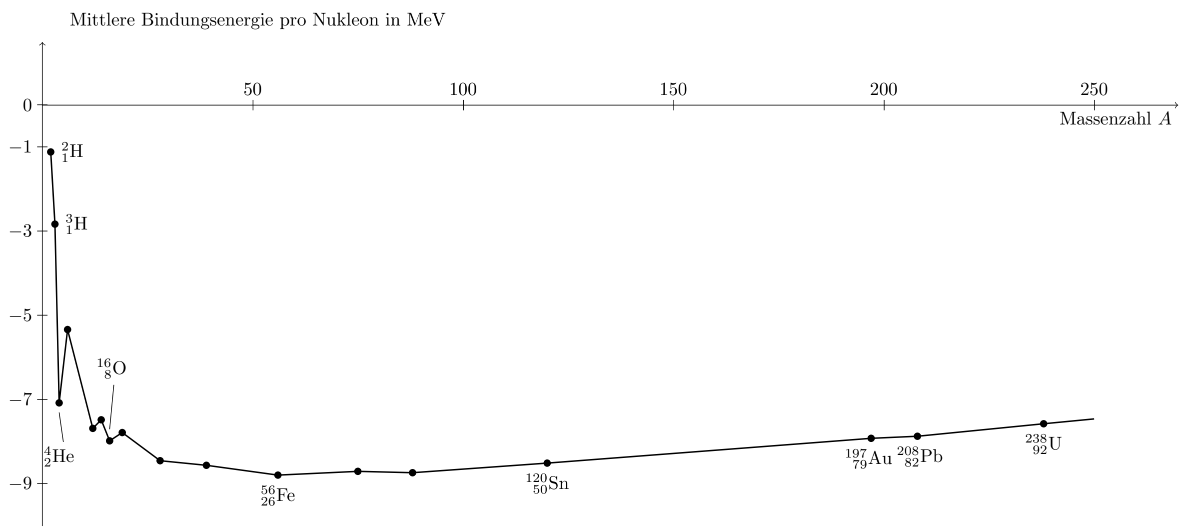
Isotope zerfallen, wenn sie zu weit vom Stabilitätstal entfernt sind, durch α-Zerfall (ab $N + Z > 200$), β^--Zerfall (wenn man zu viele Neutronen hat), β^+-Zerfall (wenn man zu viele Protonen hat); γ-Strahlung ist dann Begleiter von obigem. Es gibt das obige Stabilitätstal.

Für die Motivation der ersten DGL, welche wir betrachten (15.3 a), interessieren wir uns zunächst für den *Zeitpunkt des Zerfalls eines Isotops.* Die Zeit bis zum Zerfall eines einzelnen, gegebenen Isotops ist zufällig, nicht vorhersehbar und gedächtnislos. Man spricht von spontanem Zerfall (spontaneous decay), bis ein stabiler Zustand erreicht ist. Die Atome zerfallen unabhängig voneinander (sofern keine Kettenreaktionen stattfinden). Wegen diesen physikalischen Erkenntnissen schliessen wir, dass von einem Kilogramm Pu239 eine gewisse Menge in der kommenden Stunde zerfallen wird. Wenn wir 2 Stunden warten, wird etwa die doppelte Menge zerfallen. Wenn wir zudem die Anfangsmenge verdoppeln (oder halbieren), dann wird doppelt (halb) so viel zerfallen. **Zusammengefasst ist die Abnahme der Menge Pu239 proportional zur Zeitdauer und zur aktuellen Menge.** Diese Erkenntnis lassen wir in den kommenden Seiten in die Modellierung einfliessen (p+2).

Kurzer Exkurs zu Kernenergie/-waffen: die 2 zentralen Gründe, weshalb wir Kernenergie und Kernwaffen haben (erste Hälfte 20. Jhdt; gegen 2. Weltkrieg hin wurde klar, dass man damit eine Bombe bauen kann; historisches Pech für Japan):

* Wenn schwere Isotope gespalten werden, haben wir einen Neutronenüberschuss. Diese überschüssigen Neutronen können dann weitere Atome spalten, das ergibt die Kettenreaktion.

* Die Energie gewinnt man durch $E = mc^2$ (Albert Einstein) aus dem Massendefekt (die Teile sind leichter als die Ausgangsprodukte! - der Rest wurde in Energie umgewandelt; so etwas kommt in der Chemie per definition nicht vor (Massenerhaltungsgesetz)). Wir haben in diesem Zusammenhang folgende Kurve:



https://schweizermonat.ch/endlich-unsere-energieprobleme-sind-geloest/

(15.3) Beispiele von Differentialgleichungen

a) <u>Radioaktiver Zerfall</u>

Kurze Repetition, wir brauchen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

oder besser mit der Zeit:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

a1) Modellierung

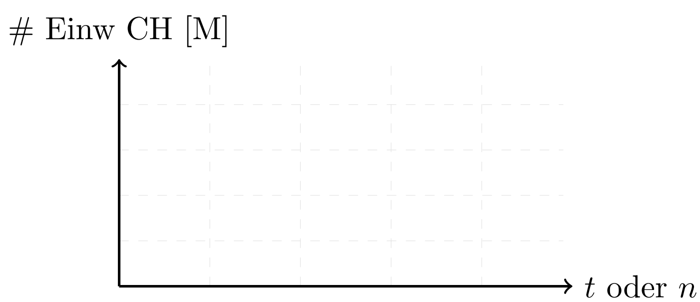
a2) Bemerkungen dazu

Welche Bedeutung hat nun das K in $y(t) = Ke^{-\lambda t}$? Man nehme $t = 0$ und erhält:

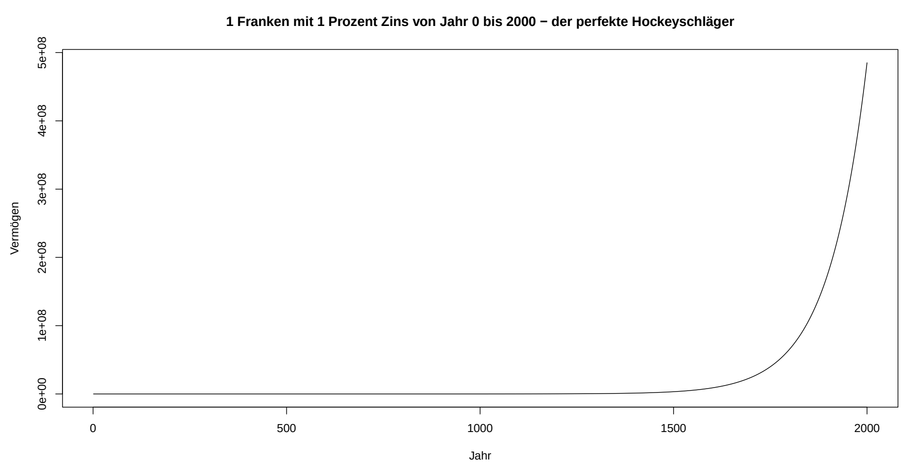
Bezeichnungen:

* $N(0) = N_0$ heisst **A**nfangs**b**edingung AB, hier $N_0 = K$.
* $N(t) = Ke^{-\lambda t}$ heisst allgemeine Lösung
* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ heisst spezielle Lösung mit AB $N(0) = N_0$.

Ein paar Bemerkungen zu exponentiellem bzw geometrischem Verhalten (nächste 7 Seiten); dazu noch www.schweizermonat.ch/alles-waechst-exponentiell.

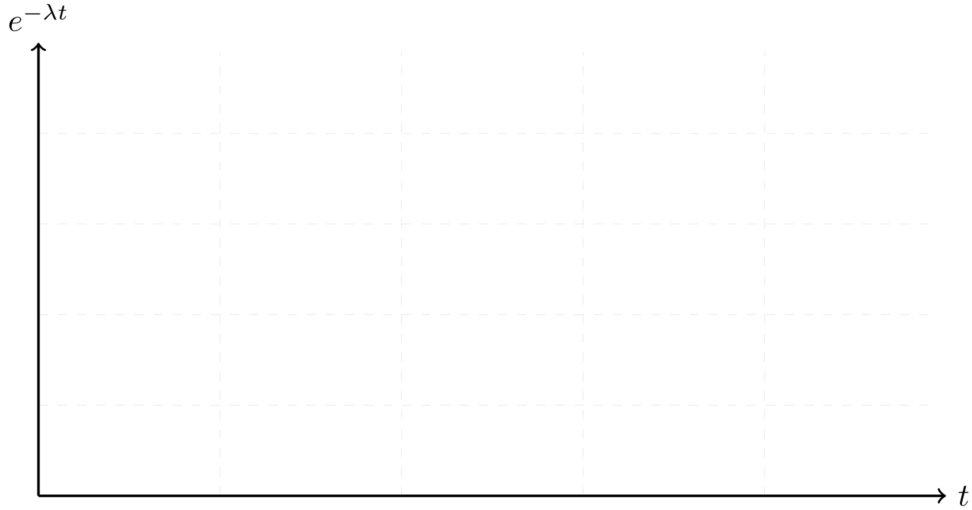


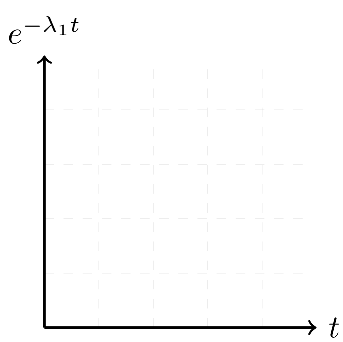
	wachsend	fallend
exp (stetig)		
geom (diskret)		

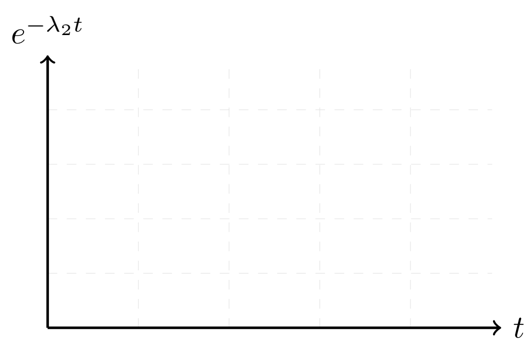


Das sieht immer so aus, sobald die Wachstumsrate und der Zeithorizont mindestens etwa 10 Verdoppelungen ergibt. In den letzten zum Beispiel 4 Verdoppelungen wächst die Funktion nämlich von 6.25 % über 12.5, 25 und 50 % auf 100 % des letzten Niveaus.

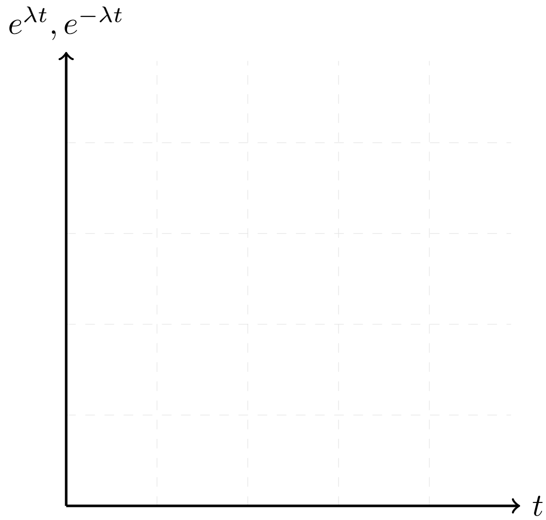
Halbwertszeiten $T_{1/2}$ (half-life)







Und jetzt geht's aufwärts: Verdoppelungszeiten T_2; haben wir hier ($e^{\lambda t}$) auch konstante Verdoppelungszeiten, analog zu den konstanten Halbwertszeiten bei $e^{-\lambda t}$?



Nach einem Jahr Mathematikstudium kann man folgende Charakteristika von geom/exp Verhalten beweisen:

Konstante Zeit bis zur Verdopplung **genau dann wenn** wir exponentielles (stetig) oder geometrisches (diskret) Wachstum haben.

und analog

Konstante Zeit bis zur Halbierung **genau dann wenn** wir exponentiellen (stetig) oder geometrischen (diskret) Rückgang haben.

Weiter: Bei geometrischem oder exponentiellem Verhalten gilt: wenn man auf der x-Achse addiert/subtrahiert, dann wird bei der y-Achse multipliziert/dividiert.

Radioaktive Abfälle: falsche Vorstellungen und die Fakten

ganz dumm: "nach 24'110 Jahren ist aller Abfall zerfallen": 24'110 Jahre ist nur die *Halbwerts*zeit (und erst noch von Pu239): > die (andere) Hälfte ist dann immer noch da!

leicht intelligenter: "in konstanten Zeiten halbiert sich die noch verbleibende Menge": das ist so, wenn man nur zum Beispiel Pu239 hat/betrachtet und sich kein neues Pu239 bildet. Dann könnte man argumentieren, dass das schnell gegen Null geht, weil $e^{-\lambda t}$ sehr schnell gegen 0 geht (diese letzte Aussage stimmt zwar so - es wäre aber immer noch sehr lange):

NB: Wenn man von "schnell gegen 0 gehen" spricht, dann meint man vor allem im Vergleich zu einem Potenzzusammenhang wie

$$\frac{1}{t^{\alpha}}$$

wo $\alpha > 0$. Potenzen (im Nenner) gehen in der Tat langfristig langsamer gegen 0!

Auf der nächsten Seite sehen Sie, wie Hochaktiver Abfall (HAA) aus der Jahresprodukt-ion von 1 GW (elektrisch) zerfällt. Beachten Sie folgende 5 Punkte dieser Darstellung:

1. Ohne radiologische Nachbearbeitung (sog. Transmutationen)

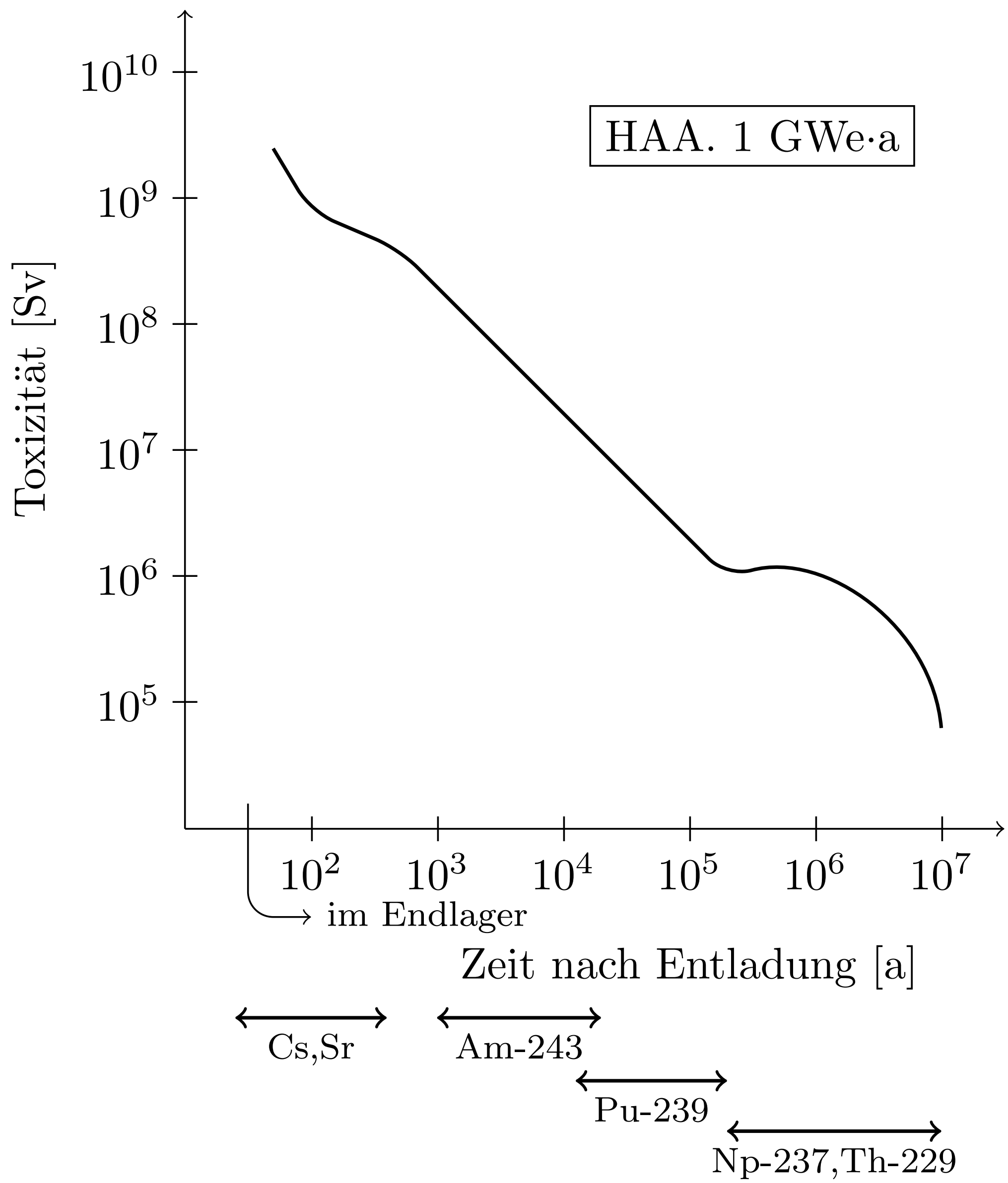
2. Durch Zerfallsreihen entstehen nacheinander immer wieder radioaktive Stoffe.

3. Man hat von Anfang an eine Mischung von diversen Radionukliden.

4. Es ist ein Doppelt-Logarithmischer Massstab. Da es jetzt mehr oder weniger eine Gerade ist, heisst das (vgl Kapitel 18), dass es in der Tat ein Potenzzusammenhang ist - also ein langsamer Rückgang.

5. Auf der y-Achse ist hier nicht die verbleibende Anzahl Isotope eingetragen, sondern die Toxizität in Sievert. Das berücksichtigt die Schädlichkeit für die Menschen: die Energie der Strahlung, ob α, β, γ-Strahler und welche Isotope (damit weiss man auch, in welche Organe die Isotope bei Einnahme gehen).

6. Wenn man statt *einem* Endlager die Menge auf 100 Endlager aufteilen würde (da spricht vieles dagegen), sinkt die Toxizität auch um den Faktor 100 (in 10er-logarithmischem Massstab um 2 Einheiten).


HAA. 1 GWe·a
Toxizität [Sv]
10^{10}
10^9
10^8
10^7
10^6
10^5
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
im Endlager
Zeit nach Entladung [a]
Cs,Sr
Am-243
Pu-239
Np-237,Th-229

Die C-14-Methode zur Altersbestimmung (Nobelpreis: Willard Libby)

C12, C14 ($T_{1/2} = 5730$ Jahre, extrem selten)

$$y' = -\lambda y \quad \text{und} \quad \text{damit} \quad y(t) = Ke^{-\lambda t}$$

Pflanzen, Lebewesen (organischer Ursprung, ”C”)

C12 und C14 *biologisch* gleich

Pflanzen und Lebewesen bauen C12 und C14 ein;
wenn gestorben: C14 baut sich ab, während es sich
in der Atmosphäre durch kosmische Strahlung,
Spallation, aus N14 erneuert.

Bei konkretem Fund: Verhältnis
C14 zu C12 messen und t finden (siehe Buch)

300 - 60’000 Jahre brauchbar, danach Nachweisgrenze
unterschritten

Probleme der Methode - bitte Details in der Fachliteratur nachschauen (ETH Hönggerberg hat Expertise):

1. Verfälschungen durch Sonnenaktivität

2. Verfälschungen durch verbleibende Radionuklide der *Oberflächen*tests mit Nuklearwaffen bis 1963: Durch die Kernwaffentests wurde bis 1963 die C14-Konzentration relativ zu C12 fast verdoppelt:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e2/Radiocarbon_bomb_spike.svg

3. Das Holz in alten Häusern liefert Zeit, wann der Baum gefällt wurde, nicht, wann das Haus gebaut wurde....

4. Verbrauch *fossiler* Energieträger steigert den Anteil von C14-freiem CO2 (fossil ist alt und damit fast nur noch C12 vorhanden).

5. https://schweizermonat.ch/wie-wissen-wir-dass-oetzi-5300-jahre-alt-ist

Damit erstmal Schluss mit Folgerungen aus $e^{\lambda t}$.

Wir werden jetzt viele weitere Beispiele anschauen, in denen DGL als Modellierungsinstrumente sich aufdrängen. In Kapitel 15 wird dabei vor allem das Aufstellen der DGL geübt. Die Lösung der folgenden DGL wird - wenn überhaupt - in Kapitel 16 folgen.

b) Wachstum von Populationen

1) $N(t) =$ Anzahl Individuen zur Zeit t:
Luchse im Kanton Glarus
Gängige Annahme: *absolute* Zunahme
proportional zum aktuellen Stand, also:

2) unbeschränktes Wachstum (häufig) unrealistisch
feste obere Schranke $B, B > 0$ oft sinnvoll
"Trägerkapazität" des Habitats
$0 \leq N(t) \leq B$ und zwar:

3) Kombination obiger Ansätze:

Lsg im Buch: Sigmoide Kurve (Spezialfall ist "logistische" Kurve)

c) <u>Ausbreitung einer Infektion</u> (erstes, triviales Modell; vgl p+2)

G Gesunde, N Infizierte; $G + N = B$

keine Genesung, nicht tödlich, also B konstant

hier: infiziert = infektiös = krank und zwar sofort

Zwei didaktische Tips:

* von Infizierten ausgehen und
* "Infektion = Erfolg"

$N'(t)$ proportional zur Anzahl *genügend enger* Kontakte zwischen Gesunden G und Infizierten N

NB: "genügend enger" (Kontakt) ist eine praktische, gängige Formulierung in der mathematischen Epidemiologie und bedeutet einfach, dass es für eine Infektion reicht (HIV: Beischlaf, Covid19: anhusten, mittelalterlicher Aberglaube: <u>*Blick*</u>kontakt.)

Damit ist $N'(t)$ proportional zur An*zahl* $N(t)$ Infizierter und An*teil* Gesunden

$$\frac{B - N(t))}{B} ,$$

also

e) <u>Bimolekulare Reaktionen</u> (Molekül-Molekül-Reaktion)

a, b Konzentration von A, B am Anfang; $x(t)$ Konzentration von C zur Zeit t.

Massenwirkungsgesetz (Spezialfall mit 1 Reaktionsprodukt, 1. Semester Chemie):

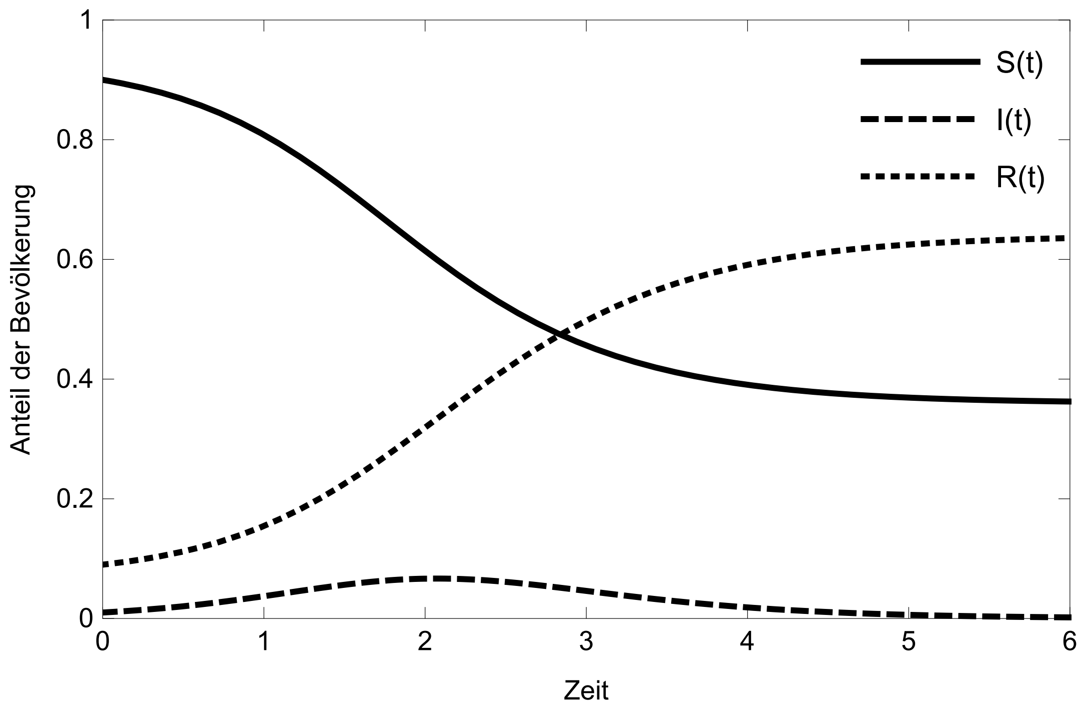
Beispiele zu DGL-*Systemen*:

Erraten Sie eine Lösung von:

SIR (Standardmodell, nicht direkt auf Corona anwendbar, nur numerisch lösbar)

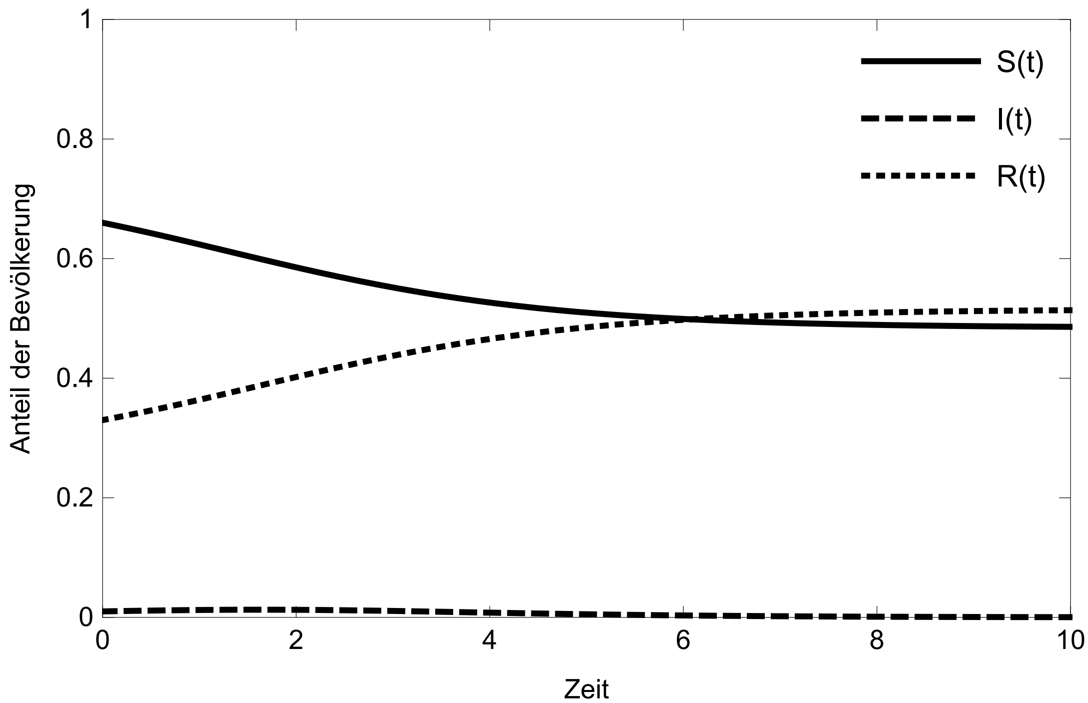
akademische Welt: $R_0 := \frac{\lambda}{\mu}$; sogenannte Basic Reproduction Ratio: Anzahl Nachkommen einer infizierten Person unter optimalen Bedingungen; d.h. $S(0) \doteq 1$.

Politik:



H.I.T: Herd Immunity Threshold, am Besten erklärt mit extremem $R_0 = 10$ und dann mit obigem R_0:

vgl Wikipedia für Werte von R_0:
https://en.wikipedia.org/wiki/Basic_reproduction_number



Dieses Thema (und viele andere aus Kapitel 15) kann man an Gymnasien, zum Beispiel in einer Arbeitswoche (Leistungskurs, Maturaarbeit) mit der Mathematik- oder Physiklehrkraft, durchaus behandeln. Klimamodelle sind viel komplexer, aber die Grundideen der Modellierung haben Sie jetzt schon mal gesehen.

Paar Hinweise Wissenschaftskommunikation:

* MNF-relevant: Klima, Epidemien, KKW (Betrieb, Abfall)

* Realität vs Modell (SIR) vs Simulation (siehe 2 Graphen oben)
* Modellrisiko: $S \to I \to R$ oder $S \to I \to R$ und dann wieder nach S?
* versteht Publikum (Politik, Journalismus) Modellannahmen
* Wegen der Komplexitätsreduktion: Benutzen Sie Formulierungen wie "der Haupteffekt ist"; "in diesem Vortrag/Artikel gilt.... (ausser wir thematisieren es explizit)" - aber die Aussage muss immer stimmen: Sie müssen als Wissenschaftler/in zudem das letzte Wort haben! https://www.kommunikation.uzh.ch/de/medien/anfragen.html

www.reach.ch
www.luchsinger-mathematics.ch/as10.pdf
www.luchsinger-mathematics.ch/me.html
https://schweizermonat.ch/wie-man-eine-epidemie-stoppt
https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzer_Tod (zeigen)
Vortrag Christoph Luchsinger bei Science Alumni UZH, 15. April 2021:
https://www.sciencealumni.uzh.ch/de/Veranstaltungsarchiv.html

Lanchester-DGL: KLICKER: 10'000 gegen 2'000 - wie ist der Schlussstand?

1. Filmwelt "Once Upon a Time in the West" vs "High Noon" oder parallel vs seriell

Mehr dazu auf https://schweizermonat.ch/wo-ist-frank/

2. Die Lanchester DGL für sich gegenseitig bekämpfende Populationen (N^2-Gesetz)

3. Militär: "Kräfte konzentrieren", "Schwergewicht bilden", "Klotzen, nicht Kleckern" (Heinz Guderian), Schlacht von Waterloo: "Wann kommt Blücher?"

4. Literarisch: von Heinrich von Kleist (1777-1811) in der Novelle "Michael Kohlhaas" (1810): "Der Hauptmann aber, der es führte, namens **Gerstenberg**, benahm sich so schlecht dabei, dass die ganze Expedition Kohlhaasen, statt ihn zu stürzen, vielmehr zu einem höchst gefährlichen kriegerischen Ruhm verhalf; denn da dieser Kriegsmann [Gerstenberg] **sich in mehrere Abteilungen auflösete**, um ihn [Kohlhaas], wie er meinte, zu umzingeln und zu erdrücken, **ward er von Kohlhaas, der seinen Haufen zusammenhielt, auf vereinzelten Punkten, angegriffen und geschlagen**, dergestalt, dass schon, am Abend des nächstfolgenden Tages, kein Mann mehr von dem ganzen Haufen, auf den die Hoffnung des Landes gerichtet war, gegen ihm im Felde stand."

***

Lotka-Volterra-Gleichungen (auch als Räuber-Beute-Gleichungen bekannt, freiwillig): siehe Web oder angegebene alte Vorlesungen in Basel von Herrn Luchsinger.

Was könnte an der Prüfung zu DGL-*Systemen* kommen?

(15.4) Allgemeines über Differentialgleichungen

→ lesen im Buch

Was für DGL gibt es alles? Paar Hinweise:

* gewöhnliche und partielle (die zweiten machen wir nicht; u.a. Maxwell-, Schrödinger- und Wärmeleitungsgleichung)

* 1. Ordnung mit y', y und 2. Ordnung mit y'', y', y (die zweiten machen wir nicht - ausser dass wir Lösungsvorschläge überprüfen oder konstante Lösungen suchen)

Die allgemeine Form einer expliziten DGL 1. Ordnung lautet $y' = F(x, y)$, wo F eine Funktion von zwei Variablen ist. Beispiele werden wir zur Genüge sehen, wie etwa

$$y' = \frac{2y}{x}$$
$$y' = x - y + 1, \quad \text{usw. .}$$

Wir halten hier noch formell fest, was man unter einer *Lösung* der Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ versteht: Eine Funktion $y = f(x)$ heisst Lösung dieser DGL, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich D gilt $f'(x) = F(x, f(x))$.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

In 3Blue1Brown https://www.3blue1brown.com/topics/differential-equations
https://www.3blue1brown.com/lessons/differential-equations
https://www.3blue1brown.com/lessons/pdes
https://www.3blue1brown.com/lessons/heat-equation
https://www.3blue1brown.com/topics/epidemics Epidemienmodellierung

Lösung einer DGL ist eine Funktion $y(x)$ (oder $y(t)$) und nicht wie sonst eine Zahl!

Bezeichnungen (anhand exponentiellem Wachstum):
* $N(0) = N_0$ heisst **A**nfangs**b**edingung AB
* $N(t) = Ke^{-\lambda t}$ heisst allgemeine Lösung
* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ heisst spezielle Lösung mit AB $N(0) = N_0$.

Rate versus Halbwerts/Verdoppelungszeit:
Bei Rückgang: $\lambda T_{1/2} = \ln(2)$
Bei Wachstum: $\lambda T_2 = \ln(2)$

Was für DGL gibt es alles? Paar Hinweise:

* gewöhnliche und partielle (die zweiten machen wir nicht - aber gutes, kurzes Video dazu: https://www.3blue1brown.com/lessons/pdes)

* 1. Ordnung mit y', y und 2. Ordnung mit y'', y', y (die zweiten machen wir nicht - ausser dass wir Lösungsvorschläge überprüfen oder konstante Lösungen suchen)

Die allgemeine Form einer expliziten DGL 1. Ordnung lautet $y' = F(x, y)$, wo F eine Funktion von zwei Variablen ist. Beispiele werden wir zur Genüge sehen, wie etwa

$$y' = \frac{2y}{x}$$
$$y' = x - y + 1, \quad \text{usw. .}$$

Wir halten hier noch formell fest, was man unter einer *Lösung* der Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ versteht: Eine Funktion $y = f(x)$ heisst Lösung dieser DGL, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich D gilt $f'(x) = F(x, f(x))$.

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Bei einer Differentialgleichung suchen wir als Lösung nicht eine Zahl, sondern eine Funktion $y(x)$. Zur Erinnerung, so sieht eine Differentialgleichung aus:

$$y' = \frac{2y}{x}, y(0) = y_0$$

Wahr oder Falsch

Frage 2: Gegeben sei folgende Differentialgleichung ohne Anfangsbedingung $y' = y$. Dann gibt es keine eindeutige Lösung für $y(x)$, sondern unendlich viele Lösungen. Wahr oder Falsch

Frage 3: Die folgende Differentialgleichung ist gegeben: $y' = 2, y(0) = 0$. Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung für die Differentialgleichung? Hinweis: Sie haben noch nicht gelernt, wie man Differentialgleichungen löst. überlegen Sie sich, welche der Antwortmöglichkeiten diese beiden Bedingungen erfüllt.

A) $y(x) = 3x + 1$
B) $y(x) = 2x$

Frage 4: Die folgende Differentialgleichung ist gegeben: $y' = 2x, y(0) = 1$. Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung für die Differentialgleichung? Hinweis: Sie haben noch nicht gelernt, wie man Differentialgleichungen löst. überlegen Sie sich, welche der Antwortmöglichkeiten diese beiden Bedingungen erfüllt.

A) $y(x) = x^2 + 1$
B) $y(x) = 2x$

Frage 5: Die folgende Differentialgleichung ist gegeben: $y' = \frac{1}{3}, y(0) = -3$. Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung für die Differentialgleichung? Hinweis: Sie haben noch nicht gelernt, wie man Differentialgleichungen löst. überlegen Sie sich, welche der Antwortmöglichkeiten diese beiden Bedingungen erfüllt.

A) $y(x) = 3x^2 - 3$
B) $y(x) = \frac{1}{3}x - 3$

Frage 6: Die folgende Differentialgleichung ist gegeben: $y' = \cos(x), y(0) = 0$. Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung für die Differentialgleichung? Hinweis: Sie haben noch nicht gelernt, wie man Differentialgleichungen löst. überlegen Sie sich, welche der Antwortmöglichkeiten diese beiden Bedingungen erfüllt.

A) $y(x) = -\sin(x)$
B) $y(x) = \sin(x)$

Frage 7: Die folgende Differentialgleichung ist gegeben: $y' = 3y, y(0) = 1$. Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung für die Differentialgleichung? Hinweis: Sie haben noch nicht gelernt, wie man Differentialgleichungen löst. überlegen Sie sich, welche der Antwortmöglichkeiten diese beiden Bedingungen erfüllt.

A) $y(x) = x^3 + 1$
B) $y(x) = e^{3x}$

Frage 8: Die folgende Differentialgleichung ist gegeben: $y' = y, y(1) = 2e$. Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung für die Differentialgleichung? Hinweis: Sie haben noch nicht gelernt, wie man Differentialgleichungen löst. überlegen Sie sich, welche der Antwortmöglichkeiten diese beiden Bedingungen erfüllt.

A) $y(x) = 2e^x$
B) $y(x) = e^{2x}$

Lösungen zu den Klickerfragen:

Frage 1: Wahr; Frage 2: Wahr. Wir suchen nach einer Funktion, die abgeleitet wieder sich selber ergibt. Das ist natürlich $y(x) = e^x$. Aber $y(x) = Ce^x$ für $C \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls eine Lösung. Somit gibt es unendlich viele Lösungen; Frage 3: Die Lösung ist B) $y(x) = 2x$; Frage 4: Die Lösung ist A) $y(x) = x^2 + 1$; Frage 5: Die Lösung ist B) $y(x) = \frac{1}{3}x - 3$; Frage 6: Die Lösung ist B) $y(x) = \sin(x)$; Frage 7: Die Lösung ist B) $y(x) = e^{3x}$. Es gilt nämlich: $y(0) = e^{3\cdot 0} = 1$ und $y'(x) = (e^{3x})' = 3e^{3x} = 3y(x)$; Frage 8: Die Lösung ist A) $y(x) = 2e^x$. Es gilt nämlich: $y(1) = 2e^1 = 2e$ und $y(x) = (2e^x)' = 2e^x = y(x)$.