14. INTEGRATION VON VEKTORFUNKTIONEN

(14.2) Gewöhnliche Integration von Vektorfunktionen

Eine Vektorfunktion $\vec{r}(t)$, gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix},$$

wird bekanntlich (vgl. (8.5)) koordinatenweise abgeleitet:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \\ \dot{r}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ganz analog kann man das bestimmte Integral koordinatenweise berechnen. Wir definieren:

$$\boxed{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b r_1(t)\,dt \\ \int_a^b r_2(t)\,dt \\ \int_a^b r_3(t)\,dt \end{pmatrix}.}$$

Der Wert dieses Integrals ist also wieder ein Vektor. Wir betrachten nun Anwendungen dieses Konzepts.

<u>Beispiele</u>

Zur Vorbereitung repetieren wir aus Kapitel 9 den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Strecke im eindimensionalen Fall.

Wir haben:

1. Von einem bewegten Massenpunkt sei der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

zu einem beliebigen Zeitpunkt t bekannt. Zur Zeit t_0 befinde er sich an der durch den Ortsvektor $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ gegebenen Stelle. Wo befindet er sich zum Zeitpunkt t?
Es sei $\vec{r}(t)$ der Ortsvektor des Massenpunkts zur Zeit t. Nach (8.4) ist dann $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$. Für die 1. Koordinatenfunktion gilt daher

$$v_1(t) = \dot{r}_1(t) \ .$$

Durch Integration erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t} v_1(u)\, du = \int_{t_0}^{t} \dot{r}_1(u)\, du = r_1(t) - r_1(t_0) \ ,$$

denn $r_1(t)$ ist natürlich eine Stammfunktion von $\dot{r}_1(t)$. (Da die obere Integrationsgrenze t heisst, wurde die Integrationsvariable neu mit u bezeichnet.) Analoge Formeln gelten für die beiden andern Koordinaten. Diese drei Beziehungen lassen sich gemäss der obenstehenden Definition zur folgenden Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(u)\, du = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \ .$$

Wir erhalten als Antwort auf die eingangs gestellte Frage

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(u)\, du \ .$$ ⊠

Wir stellen fest, dass die Integration auch für Vektoren als Umkehrung der Differentiation betrachtet werden kann (vgl. (12.8), wo auch das eindimensionale Analogon der obigen Formel steht).

Ein konkretes Beispiel: Ein Punkt bewegt sich im Raum mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 - 3t^2 \\ 1 + 4t^3 \end{pmatrix}.$$

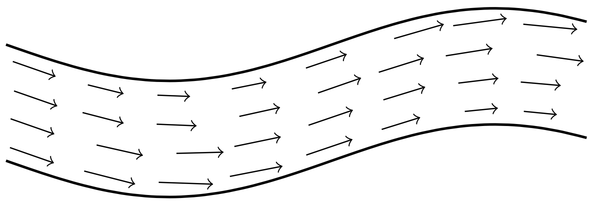
Wo ist er zur Zeit $t = 2$, wenn er zur Zeit $t = 0$ a) im Nullpunkt, b) im Punkt $P(1, -1, 2)$ war?

(14.3) Vektorfelder (vector field)

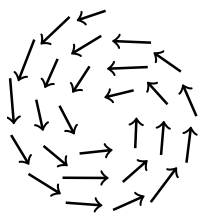
Denken Sie an Wind im $\mathbb{R}^3$, Wasser im Fluss, Blut in den Blutbahnen.

Bis jetzt haben wir Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ betrachtet, bei denen der Vektor $\vec{r}$ vom Parameter t, also nur von einer Variablen, abhing. Nun wollen wir Vektoren untersuchen, die vom Ort (welcher durch drei Variablen, nämlich die drei Koordinaten, beschrieben wird) abhängen. Diese Situation lässt sich darstellen, indem man in jedem Punkt R des Raumes den zu R gehörigen Vektor aufzeichnet. Die Länge und die Richtung dieses Vektors können sich von Punkt zu Punkt ändern. Die untenstehenden Illustrationen sind aus zeichnerischen Gründen zweidimensional; in Wirklichkeit hat man sich die Situation räumlich vorzustellen.

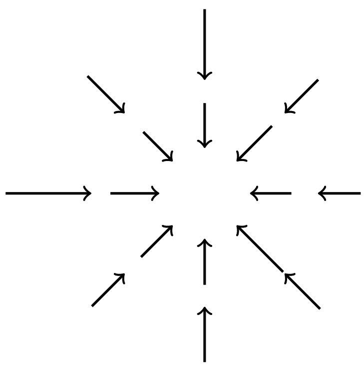
a) Eine Flüssigkeit strömt durch eine Röhre. In jedem Punkt R ist die an dieser Stelle herrschende Strömungsgeschwindigkeit (ein Vektor!) eingezeichnet:



b) Windgeschwindigkeit. In jedem Punkt eines gewissen Teils der Lufthülle ist die zugehörige Windgeschwindigkeit eingetragen (hier scheint gerade ein Wirbelsturm zu wüten):



c) Kraftfelder. Dies ist eine wichtige physikalische Anwendung. In jedem Punkt des Raumes (oder eines Teilgebiets davon) wirkt eine bestimmte Kraft, deren Grösse und Richtung im allgemeinen von ihrem Angriffspunkt abhängt:



Nun betrachten wir die Situation allgemein. Um den Punkt R vektoriell darstellen zu können, wählen wir einen Ursprung O. Zum Punkt R gehört dann ein Ortsvektor, nämlich der Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$. Da der im Punkt R angebrachte Vektor $\vec{F}$ (zum Beispiel Wind mit Richtung und Stärke) von R und damit von $\vec{r}$ (Ort) abhängt, schreibt man dafür $\vec{F}(\vec{r})$ (Wind an Ort $\vec{r}$).

Damit liegt eine Funktion vor, welche jedem Vektor $\vec{r}$ des Raumes einen neuen Vektor

$$\vec{F}(\vec{r})$$

zuordnet, also eine Funktion, die auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist und Werte in $\mathbb{R}^3$ annimmt:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Eine solche Funktion nennt man ein *Vektorfeld*. Wenn der Vektor $\vec{F}$ eine Kraft darstellt, wie im Beispiel c), dann spricht man auch von einem *Kraftfeld*.

Der Vektor $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ist wie üblich durch seine drei Koordinatenfunktionen gegeben:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{r}) \\ F_2(\vec{r}) \\ F_3(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Funktionswerte $F_1(\vec{r})$, $F_2(\vec{r})$, $F_3(\vec{r})$ reelle Zahlen, welche vom Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},$$

also jeweils von drei reellen Zahlen abhängen. F_1, F_2 und F_3 sind somit (reellwertige) Funktionen von drei Variablen. Auf Funktionen von mehreren Variablen wird später noch genauer eingegangen (Kapitel 22). Es folgen zwei formelmässig gegebene Beispiele:

1. Wenn die involvierten Funktionen nicht so gut bekannt sind, hilft eine Wertetabelle: Wir betrachten dazu ein Vektorfeld in der Ebene, gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_1 + r_2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen eine Wertetabelle auf, wie wir sie für gewöhnliche Funktionen kennen.

$\vec{r}$	$\vec{F}(\vec{r})$	$\vec{r}$	$\vec{F}(\vec{r})$	$\vec{r}$	$\vec{F}(\vec{r})$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Elektrostatisches Feld einer Punktladung: Sie müssen nachfolgende Details aus der Phyisk *nicht* kennen. Lediglich die Formel am Schluss werden wir dann genauer anschauen, von hoher Flughöhe aus analysieren und auf den kommenden Seiten eine paar allgemeine Schlussfolgerungen herleiten.

Eine allgemeine Schlussfolgerung aus dem letzten Beispiel. Wir stellten fest, dass der Betrag des elektrostatischen Feldes umgekehrt proportional zum Quadrat des Betrages von $\vec{r}$ (also der Distanz zum Ursprung) ist:

$$|\vec{E}(\vec{r})| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\ |\vec{r}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^2}\ .$$

Was wir hier erarbeitet haben, ist ein allgemeines Prinzip, welches in Naturwissenschaft und Technik viele Phänome erklären hilft. Wann immer wir eine Formel von der Art antreffen, dass eine Wirkung w dem folgenden Gesetz genügt:

$$w = \frac{KQ}{4\pi r^2}\ ,$$

dann kann man das folgendermassen interpretieren: K ist eine Naturkonstante, Q eine Quelle im Ursprung, r die Distanz zum Ursprung und damit zur Quelle. Kommt uns $4\pi r^2$ bekannt vor? Es ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius r. Doch weshalb taucht dies hier im Nenner auf? Wenn wir zum Beispiel eine Strahlungsquelle im Ursprung platzieren (Mobiltelefon, radioaktive Probe), dann fassen wir diese als Punktquelle auf, welche radial in alle Richtungen strahlt. Wenn wir jetzt erstmal lediglich die Verdünnung der Strahlungsquelle durch Distanz betrachten, dann gilt folgendes: Wenn Sie sich von 2 Metern auf 4 Meter Distanz von der radial in alle Richtungen strahlenden Quelle entfernen, wird nicht mehr nur die Hälfte der Strahlung auf Sie treffen, sondern nur noch ein Viertel: dazu denken Sie sich eine Kugel von 2 Metern und eine solche von 4 Metern Radius um die Quelle. Die Oberflächen der Kugeln sind $4\pi 2^2 = 16\pi$ beziehungsweise $4\pi 4^2 = 64\pi$. Es ist also ein Faktor 4. Die ursprünglich von der Quelle emittierten Strahlen verteilen sich damit auf eine 4 mal grössere Fläche und entsprechend trifft auf jeden cm^2 auf der äusseren Kugel nur noch 1/4 der Strahlen im Vergleich zu einem cm^2 auf der inneren Kugel. Dass $4\pi r^2$ in obiger Formel in den Nenner gehört, kann man dann auch so verstehen, dass KQ auf eine Fläche $4\pi r^2$ aufgeteilt wird, also "pro" Fläche und "pro" ist ein Hinweis, dass etwas in den Nenner gehört.

Was sind nun die Konsequenzen dieser Formel? Ein paar Beispiele, wobei wir nochmals die Einschränkungen der nachfolgenden Schlussfolgerungen auflisten: es muss eine Punktquelle sein, welche radial in alle Richtungen wirkt. Wir haben Bremswirkungen, Wechselwirkungen nicht berücksichtigt, sondern lediglich die Verdünnung der Strahlungsquelle durch Distanz betrachtet, rein von der Geometrie, der Symmetrie. Physikalisch kann man dies oft durch den Energieerhaltungssatz erklären. Wir betrachten nur den Haupteffekt. Für Details und genauere Angaben konsultiere man die entsprechende Fachliteratur.

1. Die Strahlen des Mobiltelefons: Sie sollten längere Gespräche mit Kabel durchführen: anstatt dass Sie das Mobiltelefon direkt am Ohr halten (und damit praktisch die Hälfte der Strahlen mit Ihrem Kopf absorbieren), trifft bei 1 Metern Distanz nur noch ein Bruchteil auf Ihren Kopf und die heikle Gehirnregion auf. Wir haben eine quadratische Abnahme mit der Distanz.
2. Auch bei radioaktiven Strahlen gilt *bei Punktquellen* analog dem ersten Beispiel eine quadratische Abnahme. Die 3 Grundprinzipien des Strahlenschutzes beinhalten denn auch: Abschirmung, Expositionsdauer und eben die Distanz.
3. Die Gravitationsformel nach Newton:
$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$
4. Auch die Intensität der Schallwellen (Energie **pro Fläche** und pro Zeit) im Freien, aber nicht die empfundene Lautstärke (vgl Kapitel 18 im Buch), nimmt mit der Distanz quadratisch ab (bei Punktquellen - was Lautsprecher gewöhnlich eben gerade nicht sind!).

5. Bei Radar-Geräten muss man berücksichtigen, dass die Strahlen vom aussendenden Radargerät auf das Flugzeug treffen und dort *erneut* gesendet (reflektiert) werden. Das führt im Wesentlichen (abgesehen von Spezialeffekten) zu einer Abnahme mit

$$\frac{1}{r^2}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^4}.$$

   Um dieser sehr starken Abnahme entgegenzuwirken kann man auf Flugzeugen einen Sender (Transponder) installieren, der aktiv von sich aus sendet.

6. In der Seismologie will man mit Sprengungen im Boden Rückschlüsse auf den Untergrund machen. Bei homogenem Untergrund hätte man bei einer einzelnen Sprengladung eine quadratische Abnahme bis zur ersten Reflexion; die Abweichungen davon helfen in der Seismologie, Rückschlüsse zum Untergrund zu machen.
7. Während man bei einer Luftexplosion auch eine quadratische Abnahme der Wirkung hat, gilt erfahrungsgemäss approximativ bei Explosionen auf der Oberfläche, dass dank Bodeneffekt die Abnahme gemäss $r^{-2.2}$ geschieht.
8. Bei Explosionen in Flugzeugen ist die Prognose nicht gut, da es sich im Wesentlichen um eine eindimensionale Röhre handelt. Die Explosionswirkung kann sich kaum verdünnen.

Eine weitere Frage ist, wie die Wirkung einer stärkeren Quelle durch grösseren Abstand wieder neutralisiert werden kann. Dies kann man aber einfach an der Formel ablesen:

$$w = \frac{KQ}{4\pi r^2} \, .$$

Konstant sind K und 4π. Wenn wir Q verneunfachen, muss man r verdreifachen, um die gleiche Wirkung zu haben wie zuvor.

(14.4) Kurvenintegrale (line integral, path integral, curve integral, and curvilinear integral)

Vorbereitung:

Ausführung:

Somit können wir zusammenfassend sagen: Die in der besprochenen Situation geleistete Arbeit ist definiert durch

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \,.$$

Ein Integral dieser Form heisst ein Kurvenintegral. Es kann auch für beliebige Vektorfelder, unabhängig vom Begriff der Arbeit, definiert werden. Wir halten also allgemein fest:

Es sei $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ein beliebiges Vektorfeld und C sei ein Kurvenstück, gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t \in [a, b])$. Unter dem *Kurvenintegral* (oder Linienintegral) von $\vec{F}$ über C versteht man das Integral

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt \,. \tag{1}$$

Beachten Sie, dass es sich bei (1) um ein ganz gewöhnliches Integral einer Funktion einer Variablen handelt.

Ist die Definition des Kurvenintegrals einmal vorhanden, so kann man den Begriff der Arbeit in seiner allgemeinsten Form als ein derartiges Kurvenintegral definieren — die motivierenden Betrachtungen haben gezeigt, dass das Kurvenintegral für diesen Zweck unentbehrlich ist.

Schreibt man die Vektoren in Komponentenform

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{r}) \\ F_2(\vec{r}) \\ F_3(\vec{r}) \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix},$$

so erhält man, ausführlich geschrieben:

$$\boxed{\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_a^b \big(F_1(\vec{r}(t))\dot{r}_1(t) + F_2(\vec{r}(t))\dot{r}_2(t) + F_3(\vec{r}(t))\dot{r}_3(t)\big)\, dt \,.} \tag{2}$$

Unter Verwendung von (2) lassen sich Kurvenintegrale berechnen (siehe (14.6), wo auch ein Rechenschema angegeben ist).

(14.5) Weitere Informationen über Kurvenintegrale

(14.6) Beispiele zur Berechnung von Kurvenintegralen

3. Zu berechnen sei $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r}$, wobei C der Einheitskreis in der x-y–Ebene sei. Für C können wir die Parameterdarstellung aus (8.2.2) wählen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] .$$

Das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist hier schon als Integrand gegeben, nämlich durch $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$, in Koordinaten also einfach

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} .$$

Hier müssen wir wohl erstmal herausfinden, was unter $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r}$ zu verstehen ist:

Zu berechnen ist entsprechend Formel (2):

Unser Rechenschema liefert

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für den Integranden $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$ erhält man

$$\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t = 0 .$$

Damit wird auch das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0 .$$

⊠

Die Tatsache, dass der Integrand gleich Null ist, hat eine ganz anschauliche Begründung: Da die Kurve C ein Kreis ist, steht der Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}$ stets senkrecht auf dem Vektor $\vec{r}$ $(= \vec{F}(\vec{r}))$. Das Skalarprodukt ist also Null. Noch etwas anschaulicher und mit gebührender Vorsicht: Fassen wir $\vec{F}$ als Kraftfeld auf, so steht bei einer Kreisbewegung die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ stets senkrecht auf dem "unendlich kleinen" Kurvenstück $d\vec{r}$. Somit ist das Skalarprodukt $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ und damit auch die geleistete Arbeit: $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$.

Bemerkung zur Situation, wenn die Kurve "geschlossen" ist:

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.