13. WEITERE INTEGRATIONSMETHODEN

(13.2) Substitution

Diese Integrationsmethode erhält man durch Umkehrung der *Kettenregel* der Differentialrechnung. Mit etwas anderen Bezeichnungen als in (5.2) lautet diese Regel

$$F(u(x))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) \ .$$

In dieser Formel setzen wir nun $F' = f$. Damit wird insbesondere F zu einer Stammfunktion von f. Die Formel sieht dann so aus:

$$F(u(x))' = f(u(x)) \cdot u'(x) \ .$$

Man entnimmt ihr, dass die zusammengesetzte Funktion

$$x \mapsto F(u(x))$$

eine Stammfunktion der (relativ kompliziert aufgebauten) Funktion

$$x \mapsto f(u(x)) \cdot u'(x)$$

ist, anders ausgedrückt: Es ist

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C \ ,}$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Trotz der Kompliziertheit des Integranden hat diese Formel viele wichtige Anwendungen. Man geht dabei so vor: Es sei $\int g(x)\,dx$ zu berechnen. Nun sieht man nach, ob der Integrand $g(x)$ in der Form

$$g(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

geschrieben werden kann, wobei f und u geeignet zu wählende Funktionen sind. Dabei ist vor allem darauf zu achten, dass im Integranden $g(x)$ sowohl die Funktion $u(x)$ als auch ihre Ableitung $u'(x)$ vorkommt. Eine sichere Beherrschung der Ableitungsregeln ist hier also unerlässlich. Hat man nun f und u bestimmt, so braucht man nur noch eine Stammfunktion F von f zu finden und sie auf $u(x)$ anzuwenden. $F(u(x))$ ist dann eine Stammfunktion von $g(x)$:

$$\int g(x)\,dx = \int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C\,.$$

Dieses Vorgehen soll nun an einigen Beispielen erläutert werden.

(13.3) Beispiele zur Substitutionsregel - in Anlehnung an Storrer

1. $I = \displaystyle\int \cos(x^3)\cdot 3x^2\,dx\,.$

2. Und was macht man bei $J = \displaystyle\int \cos(x^3)\cdot x^2\,dx\,?$

3. Für Personen, welche grössere Schwierigkeiten haben, das f, das u und das u' zu finden: schreiben Sie den Integranden $g(x)$ deutlich als 2 Faktoren und überlegen Sie sich, welcher Faktor ein $f(u(x))$ sein kann, wenn der andere dann ein $u'(x)$ sein muss - oder umgekehrt. Wir achten in den kommenden Aufgaben hierauf.
   Man kann sogar solch schreckliche Dinge wie $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$ integrieren:

Wie rechnen die Physiker/innen an dieser Stelle?

Für die Praxis merkt man sich das Vorgehen gemäss der folgenden Regel:

1) Wähle $u(x)$. Setze $du = u'(x)\,dx$.
(Diese Beziehung ergibt sich ganz formal aus

$$\frac{du}{dx} = u'(x)$$

durch Multiplikation mit dx.)

2) Ersetze im zu berechnenden Integral $u(x)$ durch u und $u'(x)\,dx$ durch du.

3) Das Integral hat nun die Form

$$\int f(u)\,du\ .$$

Bestimme eine Stammfunktion

$$\int f(u)\,du = F(u) + C\ .$$

4) Ersetze im Ausdruck $F(u)$ die Grösse u wieder durch $u(x)$. Das gesuchte Integral ist dann gleich $F(u(x)) + C$.

Mit den nächsten Beispielen illustrieren wir das Vorgehen gemäss den Punkten 1) bis 4).

4. $\displaystyle\int \sin x \cos x\,dx$

6. $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx$

(13.4) Die Substitutionsregel für bestimmte Integrale

Da $F(u(x))$ eine Stammfunktion von $f(u(x)) \cdot u'(x)$ ist, gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a))\ .$$

Da aber auch $F(u) = \int f(u)\,du$ gilt (denn F ist eine Stammfunktion von f), kann die rechte Seite auch aufgefasst werden als

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du \qquad \Big(= F(u(b)) - F(u(a))\Big)\ .$$

Somit erhalten wir die Formel

$$(*) \qquad \int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du\ .$$

Beachten Sie die “Transformation” der Grenzen des Integrals. Wir haben also zwei Möglichkeiten, die man nicht durcheinander bringen darf:

- Wenn man x als Variable betrachtet (linke Seite in (*)), so muss man am Schluss zu $F(u(x))$ übergehen. Die Integrationsgrenzen sind dann a und b.
- Wenn man u als Variable betrachtet (rechte Seite in (*)), so hat man am Schluss $F(u)$ zu betrachten, muss dann aber die neuen Integrationsgrenzen $u(a)$ bzw. $u(b)$ einsetzen.

Wir werden in dieser Vorlesung lediglich mit der ersten Variante rechnen. Im Sinne eines Wiedererkennens in späteren Vorlesungen schadet es nicht, zu wissen, dass es mit der zweiten Variante eine andere Form gibt. In beiden Formen ist es nötig, die Struktur des Integranden zu erkennen. Er muss in dieser Form vorliegen: $g(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$ und man muss die Stammfunktion F von f finden. Das empfohlene Vorgehen bei *bestimmten* Integralen mit Grenzen a und b in dieser Vorlesung ist dann also, dass man die zwei Schritte klar trennt: Stammfunktion $F(u(x))$ finden und dann bei a und b auswerten mit Hilfe der Formel

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a))\ .$$

Wir betrachten dazu nochmals das Beispiel 6 mit Integrationsgrenzen:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx =$$

(13.5) Partielle Integration (integration by parts)

Für diese Integrationsmethode gehen wir von der *Produktregel* (5.2) aus:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \; .$$

Sicher ist jede Stammfunktion der linken Seite eine solche der rechten. Nun ist aber $f(x)g(x)$ offensichtlich eine Stammfunktion der linken Seite. Also gilt

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

oder, etwas anders geschrieben

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \; .$$

Dies ist die Formel der *partiellen Integration*.

Da die Buchstaben f und g meist anderweitig gebraucht werden, schreibt man dafür gerne u und v:

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \; .}$$

Diese Formel wird oft dann mit Erfolg zur Bestimmung von $\int f(x)\,dx$ angewandt, wenn $f(x)$ in zwei Faktoren zerlegt werden kann, wovon der eine (nämlich u') eine einfache Stammfunktion (u), der andere aber (v) eine einfache Ableitung (v') besitzt. Wir illustrieren das Vorgehen mit einigen Beispielen.

Vorher geben wir noch die Formel für partielle Integration bei bestimmten Integralen an, welche man einfach durch Einsetzen der Grenzen erhält:

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \; .}$$

(13.6) Beispiele zur partiellen Integration

1. $\int xe^x dx$

In der Stochastik-Vorlesung MAT 183 brauchen wir

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx,$$

wo $\lambda > 0$ (Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsgrösse):

3. In (12.3) ist uns die Stammfunktion $\int \ln x \, dx$ vom Himmel gefallen; wie konnte man bloss darauf kommen? Versuchen wir es doch jetzt nochmals:

LAPTE: Bei der Methode der partiellen Integration muss man so vorgehen, dass das neu entstehende Integral einfacher wird. Wenn man die Funktionen klassiert nach LAPTE (Logarithmen; Algebraisch/Polynom/Potenzen; Trigonometrisch; Exponential), dann muss man die im Wort LAPTE weiter links liegenden Funktionen ableiten, die weiter rechts liegenden integrieren. Zum Beispiel ist es hilfreich, wenn aus dem Logarithmus durch ableiten ein $1/x$ wird, weil mit dem $1/x$ allenfalls vorhandene Potenzen aufgehoben werden. Hingegen bleiben trigonometrische und exponentielle Funktionen gleich kompliziert, wenn man die dann integrieren muss.

(13.7) Integraltabelle

Funktion	Stammfunktion
a) Rationale Funktionen	
$(ax+b)^n \quad a \neq 0, \quad n \neq -1$	$\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$
$(ax+b)^{-1} \quad a \neq 0$	$\dfrac{1}{a} \ln \lvert ax+b \rvert$
$\dfrac{1}{ax^2+2bx+c} \quad b^2 > ac$	$\dfrac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \left\lvert \dfrac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} \right\rvert$
$\dfrac{1}{ax^2+2bx+c} \quad b^2 < ac$	$\dfrac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \arctan \dfrac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$
$\dfrac{1}{ax^2+2bx+c} \quad b^2 = ac$	$-\dfrac{1}{ax+b}$
$\dfrac{ax+b}{cx+d} \quad c \neq 0$	$\dfrac{ax}{c} - \dfrac{ad-bc}{c^2} \ln \lvert cx+d \rvert$
b) Quadratwurzeln	
$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{\lvert a \rvert}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{\lvert a \rvert}$
c) Trigonometrische Funktionen	
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$\cot x$	$\ln \lvert \sin x \rvert$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln \lvert \tan \dfrac{x}{2} \rvert$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln \lvert \tan(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}) \rvert$

Beispiele zur Anwendung der Tabelle

A 13-4a)

A 13-5a)

Ableiten kann man immer:

wenn Sie glauben, eine Stammfunktion gefunden zu haben:

leiten Sie zur Kontrolle ab!

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.