10. DAS BESTIMMTE INTEGRAL

(10.2) Die Definition des bestimmten Integrals (engl definite integral)

Wir wollen nun — wie in (9.6) angekündigt — den in den Beispielen des Kapitels 9 untersuchten Prozess als allgemeine Konstruktion einführen.

Dazu seien ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und eine *stetige Funktion*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (a < b)$$

gegeben. Wir führen nun eine Reihe von Schritten durch:

<u>1. Schritt</u>

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n *Teilintervalle*, indem wir Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

wählen. (Wir sprechen auch von einer *Unterteilung* des Intervalls $[a, b]$.) Das i–te Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ hat die Länge $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. (Es wird nicht vorausgesetzt, dass die Teilintervalle alle dieselbe Länge haben.)

<u>2. Schritt</u>

In jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ wählen wir einen *Zwischenpunkt* ξ_i:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \ .$$

<u>3. Schritt</u>

Mit den so gewählten Grössen bilden wir die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

Eine solche Summe wird *Riemannsche Summe* (nach B. Riemann, 1826–1866) genannt.

4. Schritt

Nun verkleinern wir die Teilintervalle immer mehr (d.h., wir lassen $\Delta x_i \to 0$ streben). Dabei wird die Anzahl n der Teilintervalle automatisch immer grösser ($n \to \infty$).

Bei diesem Prozess strebt die Riemannsche Summe einem Grenzwert zu. Dieser heisst das *bestimmte Integral von f mit den Grenzen a und b* und wird mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

bezeichnet. Formelmässig geschrieben:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .}$$

Damit ist das bestimmte Integral als allgemeine mathematische Konstruktion eingeführt. Ein Vergleich mit (9.2) bis (9.5) zeigt, dass die dort durchgeführten Überlegungen konkrete Anwendungen des abstrakten Integralbegriffs sind (siehe auch (10.5)).

(10.6) Weitere Beispiele zur Anwendung des Integralbegriffs

Dieser Abschnitt ergänzt die Beispiele in Kapitel 9. Wir wollen erneut zeigen, dass der Integralbegriff zur Beschreibung von gewissen Sachverhalten zwingend benötigt wird.

b) Länge eines Kurvenstücks

Fortsetzung Länge eines Kurvenstücks:

(10.7) Ein Beispiel zur Berechnung von bestimmten Integralen

Wir haben bis jetzt kein einziges Integral explizit berechnet; das kommt *systematisch* später. Wir berechnen jetzt mal das Integral von x^2 "von Hand". Dazu noch ein Artikel von mir zu einer berühmten Formel von Gauss: https://schweizermonat.ch/der-kleine-gauss-laesst-einem-keine-ruhe .

Fortsetzung x^2 "von Hand":

(10.8) Einige Rechenregeln für das bestimmte Integral

a) Summen, Differenzen, Vielfache

Für das bestimmte Integral gelten folgende Regeln

(1) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Vertauschen der Integrationsgrenzen

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ war unter der ausdrücklichen Voraussetzung definiert worden, dass $a < b$ ist. Für $a \geq b$ *definiert* man in weitgehender Übereinstimmung mit der anschaulichen Vorstellung:

(3) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad$ für $b < a$.

(Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen!)

c) Zerlegung des Intervalls

Es sei $c \in [a,b]$. Dann gilt

$$(5) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Betrachtet man den Spezialfall, wo das Integral einen Flächeninhalt darstellt, so ist das Resultat geometrisch klar (man kann es aber auch rein rechnerisch beweisen):

Im übrigen gilt die obige Formel auch für beliebige Anordnungen von a, b, c; also z.B. für $c < b < a$ etc. Der Beweis wird durch Untersuchung der verschiedenen möglichen Fälle erbracht.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.