

Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus ”Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I - Analysis” von Christoph Luchsinger und Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. Das Copyright ist bei Birkhäuser!

10. DAS BESTIMMTE INTEGRAL

(10.2) Die Definition des bestimmten Integrals (engl definite integral)

Wir wollen nun — wie in (9.6) angekündigt — den in den Beispielen des Kapitels 9 untersuchten Prozess als allgemeine Konstruktion einführen.

Dazu seien ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und eine *stetige Funktion*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a < b)$$

gegeben. Wir führen nun eine Reihe von Schritten durch:

1. Schritt

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n *Teilintervalle*, indem wir Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

wählen. (Wir sprechen auch von einer *Unterteilung* des Intervalls $[a, b]$.) Das i -te Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ hat die Länge $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. (Es wird nicht vorausgesetzt, dass die Teilintervalle alle dieselbe Länge haben.)

2. Schritt

In jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ wählen wir einen *Zwischenpunkt* (“Stützpunkt”) ξ_i :

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i .$$

3. Schritt

Mit den so gewählten Grössen bilden wir die Summe

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Eine solche Summe wird *Riemannsche Summe* (nach B. RIEMANN, 1826–1866) genannt.

4. Schritt

Nun verkleinern wir die Teilintervalle immer mehr (d.h., wir lassen $\Delta x_i \rightarrow 0$ streben). Dabei wird die Anzahl n der Teilintervalle automatisch immer grösser ($n \rightarrow \infty$).

Bei diesem Prozess strebt die Riemannsche Summe einem Grenzwert zu. Dieser heisst das *bestimmte Integral* von f mit den Grenzen a und b und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Formelmässig geschrieben:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Damit ist das bestimmte Integral als allgemeine mathematische Konstruktion eingeführt. Ein Vergleich mit (9.2) bis (9.5) zeigt, dass die dort durchgeführten Überlegungen konkrete Anwendungen des abstrakten Integralbegriffs sind (siehe auch (10.5)).

* Wichtige Bemerkungen im Buch als HA: (10.3), (10.5) und (10.6a)

* zum Beispiel Antworten zu "wie geht Grenzübergang genau?": Keine Esoterik bitte, sondern Mathe studieren, wenn man es ganz genau wissen will.

* $\int_a^b f(x) dx$ ist eine Zahl, wenn a und b gegeben: Man nennt es das *bestimmte* Integral, sobald die Grenzen gegeben sind.

* Die Integrationsvariable ist beliebig austauschbar und verschwindet mit der Rechnung; die folgenden Ausdrücke sind alle gleich, egal ob wir mit x, u, s arbeiten:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(s) ds .$$

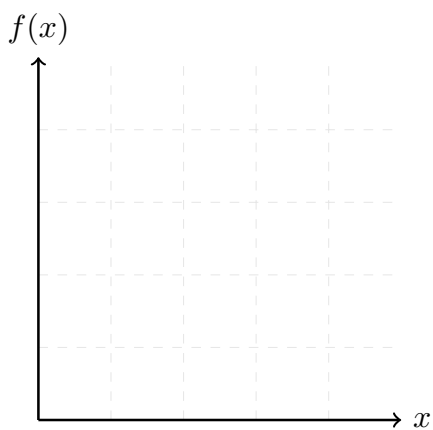
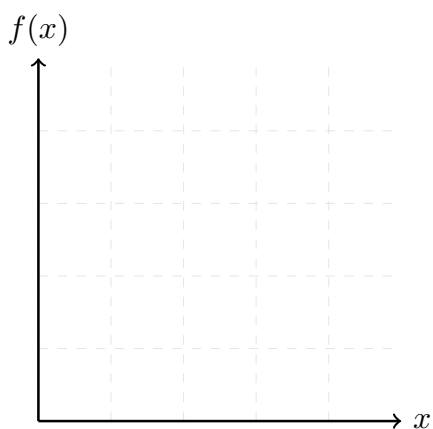
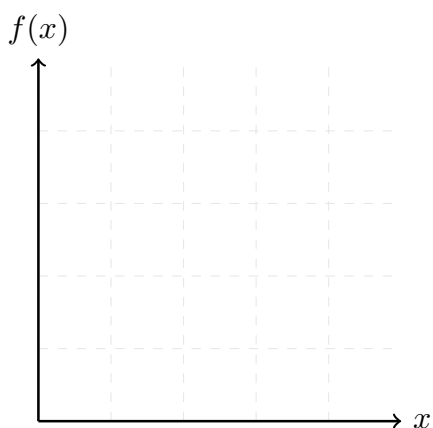
* Bitte NIE

$$\int_a^x f(x) dx .$$

Integrationsgrenze NIE als Integrationsvariable!!!!

(10.6) Weitere Beispiele zur Anwendung des Integralbegriffs

Dieser Abschnitt ergänzt die Beispiele in Kapitel 9. Wir wollen erneut zeigen, dass der Integralbegriff zur Beschreibung von gewissen Sachverhalten zwingend benötigt wird.

b) Länge eines Kurvenstücks

Fortsetzung Länge eines Kurvenstücks:

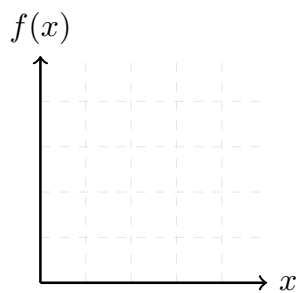
gute Nachricht: haben Ausdruck für alle Längen wenn f diff'bar.

schlechte Nachricht: selten explizit berechenbar (Stammfunktion?); braucht numerische Methoden (vgl Kapitel 21).

(10.7) Ein Beispiel zur Berechnung von bestimmten Integralen

Wir haben bis jetzt kein einziges Integral explizit berechnet; das kommt *systematisch* später. Wir berechnen jetzt mal das Integral von x^2 "von Hand". Dazu noch ein Artikel von mir zu einer berühmten Formel von Gauss:

<https://schweizermonat.ch/der-kleine-gauss-laesst-einem-keine-ruhe> .



Fortsetzung x^2 "von Hand": wollen Riemannsche Summe:

(10.8) Einige Rechenregeln für das bestimmte Integral

a) Summen, Differenzen, Vielfache

Für das bestimmte Integral gelten folgende Regeln

$$(1) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(2) \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx .$$

b) Vertauschen der Integrationsgrenzen

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ war unter der ausdrücklichen Voraussetzung definiert worden, dass $a < b$ ist. Für $a \geq b$ definiert man in weitgehender Übereinstimmung mit der anschaulichen Vorstellung:

$$(3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{für } b < a .$$

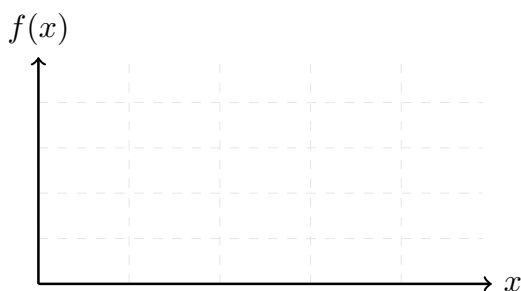
(Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen!)

c) Zerlegung des Intervalls

Es sei $c \in [a, b]$. Dann gilt

$$(5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Betrachtet man den Spezialfall, wo das Integral einen Flächeninhalt darstellt, so ist das Resultat geometrisch klar (man kann es aber auch rein rechnerisch beweisen):



Im übrigen gilt die obige Formel auch für beliebige Anordnungen von a, b, c ; also z.B. für $c < b < a$ etc. Der Beweis wird durch Untersuchung der verschiedenen möglichen Fälle erbracht.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.

Lessons learnt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(s) ds.$$

Bitte NIE

$$\int_a^x f(x) dx.$$

Integrationsgrenze NIE als Integrationsvariable!!!!

$$\text{Kurvenlänge } L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Für das bestimmte Integral gelten folgende Regeln

$$(1) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(2) \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx .$$

Für $a \geq b$ definiert man:

$$(3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{für } b < a .$$

(Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen!)

$$(5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Klickerfragen zum Aufwärmen:

Frage 1: Die Annäherung der Fläche unter einer Kurve $f(x)$ durch die Summe der Flächen von Rechtecken mit Höhe gleich dem Funktionswert an einem beliebigen Ort des jeweiligen Intervalls wird als Riemann-Summe bezeichnet. Wahr oder Falsch

Frage 2: Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$$\text{A) } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{B) } \int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{C) } \int_a^b c + f(x) dx = c + \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{D) } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Frage 3: Was passiert mit dem Integral, wenn die Intervallgrenzen vertauscht werden, d.h., wenn das Integral von a bis b in das Integral von b bis a geändert wird?

- A) $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$
 B) $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$
 C) $\int_b^a f(x) dx = \frac{1}{\int_a^b f(x) dx}$
 D) $\int_b^a f(x) dx = \sqrt{\int_a^b f(x) dx}$

Frage 4: Welche der folgenden Aussagen zum Integral $\int_a^c f(x) dx$ sind korrekt, wenn $a < b < c$? (Mehrere Antworten möglich)

- A) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$
 B) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$
 C) $\int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$
 D) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$

Frage 5: Für jede Funktion $f(x)$ gilt: $\int_a^a f(x) dx = 0$. Wahr oder Falsch

Lösungen zu den Klickerfragen:

Frage 1: Wahr; Frage 2: Die korrekten Antworten sind A und D. Diese Eigenschaften beschreiben die Linearität des Integrals; Frage 3: Die korrekte Antwort ist B. Wenn die Intervallgrenzen vertauscht werden, ändert sich das Vorzeichen des Integrals: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$; Frage 4: Die korrekten Antworten sind A, C und D; Frage 5: Wahr. Wenn die Intervallgrenzen gleich sind, ist die Breite des Intervalls null, und daher ist das Integral über dieses Intervall immer null: $\int_a^a f(x) dx = 0$.