Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I - Analysis" von Christoph Luchsinger und Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich.

Die Nummerierung des Buches wurde für die leichtere Orientierung beibehalten.

Paar philosophische Betrachtungen:

Lemma Satz Theorem Hauptsatz - das Korollar

Gerundet wird in Vlsg, Ue und Prüfung auf 5 relevante Ziffern: 2.42567 wird zu 2.4257

LS: Luchsinger-Storrer; p 8, l-5: Seite 8, 5. Zeile von unten; p +3: 3 Seiten weiter

A. VEKTORRECHNUNG

1. VEKTOREN UND IHRE GEOMETRISCHE BEDEUTUNG

(1.2) Einleitende Beispiele

Grössen, die durch die Angabe einer Zahl (sowie der zugehörigen Masseinheit) vollständig beschrieben werden:

- Preis einer Ware (in Fr.),
- Länge einer Strecke (in cm),
- Körpertemperatur (in °C),
- Frequenz eines Radiosenders (in MHz),
- Einwohnerzahl einer Stadt (reine Zahl, ohne Masseinheit).

Gibt auch Grössen, die durch die Angabe einer einzigen Zahl noch nicht vollständig bestimmt sind. Dazu gehören alle jene Merkmale, bei denen es auch auf die Richtung ankommt.

- Geschwindigkeit eines Fahrzeuges
- Kraft, welche an einem Massenpunkt angreift
- Lage eines Punktes im Raum in Bezug auf einen festen Bezugspunkt
- Translation innerhalb der Geometrie

Eine solche gerichtete Strecke nennt man einen Vektor

Es gibt offenbar zwei Varianten des Vektorbegriffs: Ortsvektoren (Kraft - es spielt eine Rolle, wo (Ort) sie greift, wo der Anfangspunkt ist) und freie Vektoren (Anfangspunkt egal). Weil der Anfangspunkt egal ist, ist ein freier Vektor nicht eindeutig festgelegt. Bilder und Definition:

(1.6) Addition und Subtraktion von Vektoren

a) Motivation

Experimente ergeben, dass sich Kräfte und Geschwindigkeiten nach dem sogenannten “Parallelogrammgesetz” “addieren”.

(i) Parallelogramm der Kräfte:

(ii) Ein Flugzeug habe relativ zur Luft die Geschwindigkeit $\vec{v}$ (true airspeed TAS), die Luft habe relativ zum Boden die Geschwindigkeit $\vec{w}$. Die Geschwindigkeit $\vec{x}$ des Flugzeugs relativ zum Boden lässt sich dann aus der folgenden Zeichnung ablesen:

(iii) Aehnliches gilt in der Geometrie für Translationen: Eine Verschiebung um $\vec{x}$, gefolgt von einer Verschiebung um $\vec{y}$ ist gleichbedeutend mit einer Verschiebung um $\vec{z}$, gemäss folgender Skizze:

b) Definition der Addition

Gestützt auf die obigen Beispiele (zunächst auf (ii) und (iii), der Fall (i) wird anschliessend auch noch zu seinem Recht kommen) definiert man die *Addition* von Vektoren wie folgt:

Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei (freie) Vektoren. Man wählt einen beliebigen Vertreter von $\vec{a}$ aus und schliesst an seinen Endpunkt P jenen Vertreter von $\vec{b}$ an, dessen Anfangspunkt gleich P ist.

Unter dem *Summenvektor* $\vec{a} + \vec{b}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man nun den Vektor, der in dieser Situation vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ führt, bzw. (da es sich um freie Vektoren handelt) jeden dazu parallelen (und gleichgerichteten) Vektor.

In der obigen Konstruktion haben $\vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ denselben Anfangspunkt, $\vec{b}$ dagegen ist verschoben. Die folgende Variante, die dem Kräfteparallelogramm abgeguckt ist und natürlich dasselbe Resultat liefert, verwendet nur Ortsvektoren mit Anfangspunkt O.

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OQ}$ zwei Vektoren. Dann ist

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OR},$$

wo R der 4. Eckpunkt des Parallelogramms mit den weiteren Ecken O, P, Q ist:

c) <u>Der entgegengesetzte Vektor</u>

Allgemein definiert man den zu $\vec{a}$ *entgegengesetzten Vektor* $-\vec{a}$ als den Vektor, der dieselbe Länge wie $\vec{a}$, aber die entgegengesetzte Richtung hat:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{PQ} \\ -\vec{a} &= \overrightarrow{QP} \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der Vektoraddition ist dann sofort klar, dass

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad \text{und} \quad (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

ist.

d) Rechenregeln für die Addition von Vektoren

Die so definierte Addition von Vektoren erfüllt nun genau die gleichen Grundregeln wie die Addition von Zahlen, nämlich:

(1) Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$.

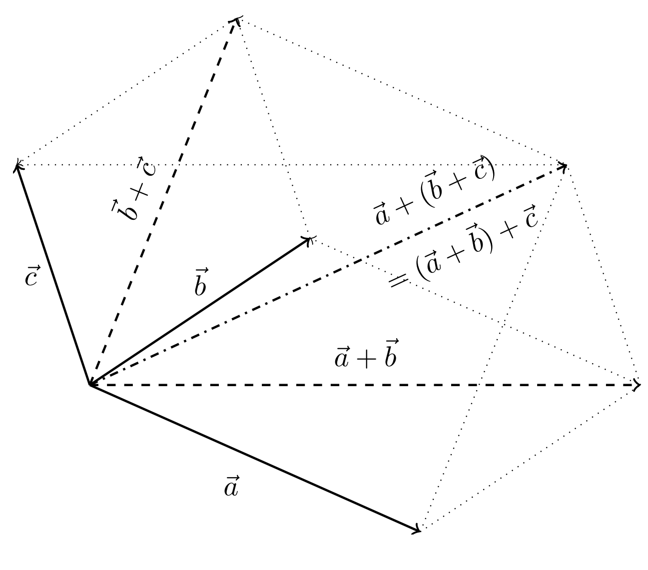
(2) Assoziativgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(3) Es gibt ein *Neutralelement* bezüglich der Addition, nämlich den Nullvektor $\vec{0}$, der die folgende Eigenschaft hat:
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, für alle Vektoren $\vec{a}$.

(4) Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es den *entgegengesetzten Vektor* $-\vec{a}$, der die folgende Eigenschaft hat:
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (und analog $(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$).

Eine Warnung und Bilder zur Veranschaulichung

Es sei noch darauf hingewiesen, dass im allgemeinen der Betrag einer Summe von Vektoren verschieden von der Summe der Beträge ist: $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Wie man der geometrischen Definition sofort entnimmt, gilt aber die sogenannte *Dreiecksungleichung* $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, vgl. auch (26.8).



e) Subtraktion von Vektoren

Die *Differenz* von Vektoren wird unter Verwendung bereits bekannter Begriffe definiert. Wir setzen nämlich in Analogie zum Rechnen mit Zahlen

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b}) \ .}$$

Die geometrische Interpretation ist die Folgende: Wir bringen $\vec{a} - \vec{b}$ im Endpunkt von $\vec{b}$ an und erhalten folgendes Bild:

Es lohnt sich, den Sachverhalt in einem Sätzchen festzuhalten:

$\vec{a} - \vec{b}$ ist der Vektor, der vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$ geht (beachten Sie die Reihenfolge!), wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ denselben Anfangspunkt haben müssen.

(1.7) Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Es sei $r \in \mathbb{R}$ (diese Bezeichnungen werden in (26.2) und (26.3) erläutert) ein Skalar (Reelle Zahlen, die im Zusammenhang mit Vektoren auftreten, werden zur Verdeutlichung oft *Skalare* genannt), $\vec{a}$ sei ein Vektor. Wir definieren jetzt den Vektor $r\vec{a}$ und unterscheiden dazu drei Fälle:

- $r > 0$: Hier ist $r\vec{a}$ der Vektor, welcher dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ hat und dessen Betrag das r–fache des Betrags von $\vec{a}$ ist:

$$|r\vec{a}| = r|\vec{a}| \ .$$

- $r = 0$: $r\vec{a} = 0\vec{a}$ wird als Nullvektor definiert:

$$0\vec{a} := \vec{0} \ .$$

- $r < 0$: Hier ist $r\vec{a}$ der Vektor, welcher die entgegengesetzte Richtung von $\vec{a}$ hat und dessen Betrag das $|r|$–fache des Betrags von $\vec{a}$ ist:

$$|r\vec{a}| = |r||\vec{a}| = (-r)|\vec{a}| \ .$$

Der Betrag $|r|$ wird in (26.8) erläutert.

Der Vektor $r\vec{a}$ heisst auch *Vielfaches* von $\vec{a}$. Die eben festgelegte Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl genügt den folgenden Rechenregeln, die sich ohne grosse Mühe geometrisch beweisen liessen.

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$
$$(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$
$$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$$
$$1\vec{a} = \vec{a}$$
$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und alle Skalare r, s.

Ein Vektor wird *Einheitsvektor* genannt, wenn er den Betrag 1 hat. Jeder Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ kann mittels Division durch $|\vec{a}|$ (d.h. durch Multiplikation mit dem Inversen der

Zahl $|\vec{a}|$) zu einem Einheitsvektor $\vec{a}_1$ gemacht werden:

$$\vec{a}_1 := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \quad \text{ist ein Einheitsvektor, denn} \quad |\vec{a}_1| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1 \; .$$

(1.8) Das Skalarprodukt (englisch: dot product, scalar product, inner product)

a) <u>Eine Motivation aus der Physik</u>

Längs einer Geraden bewegt sich ein Massenpunkt, auf den eine zur Fortbewegungsrichtung parallele konstante Kraft wirkt.

Die geleistete Arbeit wird in diesem Fall durch die Formel

$$\text{Arbeit} := \text{Kraft mal zurückgelegter Weg}$$

definiert. Vom gymnasialen Physikunterricht ist hierzu die Formel $W = Fs$ bekannt, wobei allenfalls korrekterweise Vektoren zum Einsatz kommen sollten. Diese Formel gilt aber nicht mehr im allgemeineren Fall, wenn die Kraft nicht parallel zur Fortbewegungsrichtung wirkt. Um dies formelmässig korrekt zu erfassen, betrachten wir zuerst das folgende rechtwinklige Dreieck. Es gilt $\cos\varphi = \frac{u}{F}$, also $u = F\cos\varphi$.

Damit sind wir vorbereitet, die allgemeinere Formel herzuleiten:

$\vec{F}$ = Kraft.

$\vec{s}$ = gerichtete Strecke, welche der Massenpunkt zurückgelegt hat.

Hier wirkt nicht mehr der volle Betrag $|\vec{F}|$ der Kraft, sondern nur noch der Betrag ihrer Projektion auf die Richtung des Vektors $\vec{s}$. Da diese Projektion den Betrag $|\vec{F}|\cos\varphi$ hat, gilt für die geleistete Arbeit W:

$$W = \text{Weg mal “projizierte Kraft”} = |\vec{s}|\,|\vec{F}|\cos\varphi \; .$$

Es sei darauf hingewiesen, dass $\cos\varphi$ für $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ negativ ist. Dies hat zur Folge, dass W positiv oder negativ wird, je nachdem, ob die Projektion von $\vec{F}$ in die Richtung von $\vec{x}$ oder in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Repetition Bogenmass / trigonometrische Funktionen

b) Definition des Skalarprodukts

Ausgehend von der obigen Motivation definieren wir das *Skalarprodukt* von zwei beliebigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch die Formel

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} := |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\varphi\ ,}$$

wo φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Manchmal schreibt man auch $\vec{a} \cdot \vec{b}$ statt $\vec{a}\vec{b}$.

c) Bemerkungen

1) Es sei betont, dass das Skalarprodukt von zwei Vektoren eine *Zahl* (d.h. ein Skalar) ist.
2) Wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor ist, dann ist der Winkel φ nicht bestimmt. In diesem Fall setzt man natürlich $\vec{a}\vec{b} = 0$.
3) Der Zwischenwinkel φ ist nicht eindeutig festgelegt:

   Zum Glück ist aber $\cos\varphi = \cos(-\varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$, sodass der Wert des Skalarprodukts nicht davon abhängt, welcher Zwischenwinkel gewählt wird.
4) Für $0 \le \varphi \le 2\pi$ ist $\cos\varphi$ genau dann gleich Null, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ist. Daher gilt für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$:

Das Skalarprodukt $\vec{a}\vec{b}$ ist genau dann gleich Null, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

5) Da $\cos 0 = 1$ ist, gilt für das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst die Formel

$$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{oder kurz}$$

$$\boxed{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2\ .}$$

6) Es sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass man im Skalarprodukt nicht "kürzen" oder "dividieren" darf: Aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ folgt im allgemeinen nicht, dass $\vec{b} = \vec{c}$ ist. (Beispielsweise gibt es viele verschiedene Vektoren $\vec{v}$, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen; für alle diese gilt $\vec{a}\vec{v} = 0$.)

d) Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Rechenregeln:

(1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$, für alle $\vec{a}$, $\vec{b}$ (Kommutativgesetz).

(2) $(r\vec{a})\vec{b} = r(\vec{a}\vec{b})$, für alle $\vec{a}$, $\vec{b}$ und alle $r \in \mathbb{R}$.

(3a) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$,
(3b) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$, für alle $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (Distributivgesetze).

Die Regeln lassen sich wie folgt begründen:

(1) Dies folgt sofort aus der Definition.

(2) Hier muss man eine Fallunterscheidung treffen.

Für $r \ge 0$ ist

Für $r < 0$ hat $r\vec{a}$ die zu $\vec{a}$ entgegengesetzte Richtung. Die Winkel verhalten sich gemäss der folgenden Figur:

(3) Die Begründung für die Distributivgesetze ist etwas komplizierter. Sie finden sie im Anhang (27.2).

(1.9) Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt, vektorielles Produkt oder äusseres Produkt)

englisch cross product or vector product

a) Definition des Vektorprodukts

Neben dem eben besprochenen Skalarprodukt zweier Vektoren, welches eine reelle Zahl ist, existiert noch eine weitere Verknüpfungsmöglichkeit, nämlich das *Vektorprodukt*, welches zu zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen neuen Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert. Die nachstehende Definition mag auf den ersten Blick etwas willkürlich erscheinen, es zeigt sich aber, dass sie in vielen Fällen gut angewendet werden kann.

Wir geben nun die Definition des Vektorprodukts.

Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren. Der Zwischenwinkel φ sei so festgelegt, dass $0 \le \varphi \le \pi$ gilt. Unter dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ versteht man nun den Vektor, der die folgenden drei Eigenschaften hat:

(A) Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht (normal) auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

(B) Orientierung: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*. Damit ist folgendes gemeint: Man streckt Daumen und Zeigefinger der rechten Hand flach aus und den Mittelfinger nach oben. Wenn der Daumen in Richtung $\vec{a}$ und der Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$ zeigt, so zeigt der Mittelfinger in Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$.

(C) Betrag: Für den Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ gilt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi \ .$$

1. Die Bedeutung des Vektorprodukts liegt primär darin, dass es erlaubt, formelmässig einen zu zwei gegebenen Vektoren normalen Vektor darzustellen.

2. Dies ist sehr praktisch, wenn man gewisse Vorgänge aus der Physik beschreiben will. Es seien an dieser Stelle etwa der Drall, das Drehmoment und die Lorentzkraft erwähnt.

3. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist gerade der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms mit der Seite $|\vec{a}|$ und der Höhe $|\vec{b}| \sin \varphi$.

c) Rechenregeln für das Vektorprodukt

Für das Vektorprodukt gelten die folgenden Formeln:

(1) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$, für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$.

(2) $(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b})$, für alle $\vec{a}$, $\vec{b}$ und alle $r \in \mathbb{R}$.

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ungewohnt ist, dass wegen (1) das Kommutativgesetz *nicht* gilt (man spricht hier von "Antikommutativität"). Dies bedingt eine gewisse Vorsicht im Umgang mit dem Vektorprodukt. Die Formeln (3) sind die Distributivgesetze. Es sei noch erwähnt, dass beim Vektorprodukt — genau wie beim Skalarprodukt — nicht gekürzt werden darf.

(1.10) Anwendungen in der Geometrie

a) Parameterdarstellung einer Geraden

Es seien zwei Punkte A, B im Raum ($A \neq B$) gegeben. Das Ziel ist es, die Gerade g durch A und B vektoriell darzustellen. Dies geschieht grundsätzlich dadurch, dass man eine Bedingung dafür angibt, dass ein Punkt R auf der Geraden liegt.

Wir wählen zunächst irgendeinen Punkt O als Nullpunkt und betrachten die Ortsvektoren

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{r} = \overrightarrow{OR}\ .$$

Dann ist $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, und dieser (freie) Vektor gibt die Richtung der gesuchten Geraden g an.

Trägt man nun von A aus ein beliebiges Vielfaches $t(\vec{b} - \vec{a}),\ t \in \mathbb{R}$ ab, so erhält man einen Punkt auf der Geraden g und umgekehrt wird jeder Punkt auf g so erhalten.

Damit haben wir gezeigt, dass der Punkt R genau dann auf g liegt, wenn für den Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ gilt:

$$(*) \qquad \boxed{\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})\ ,}$$

wo t eine reelle Zahl ist.

Man nennt t einen *Parameter* und die Formel $(*)$ heisst eine *Parameterdarstellung* von g. Der unbestimmte Artikel ist insofern gerechtfertigt, als eine Gerade g unendlich viele verschiedene Parameterdarstellungen besitzt: Man braucht ja nur anstelle von A und B zwei andere Punkte von g zu wählen; dann ändern sich die Grössen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $(*)$.

Eine "dynamische" Interpretation von $(*)$ erhalten wir, wenn wir t als Zeit auffassen. Da $\vec{r}$ von t abhängt, schreiben wir dafür auch $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \ .$$

Diese Formel kann zur Beschreibung einer geradlinigen Bewegung im Raum verwendet werden: Zum Zeitpunkt t befindet sich das bewegte Objekt im Endpunkt des Ortsvektors $\vec{r}(t)$. Speziell ist $\vec{r}(0) = \vec{a}$, $\vec{r}(1) = \vec{b}$, d.h. zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Objekt im Punkt A, zur Zeit $t = 1$ im Punkt B. In (8.3) werden wir übrigens sehen, wie man die Bewegung entlang beliebiger Kurven mit Hilfe von passenden Parameterdarstellungen beschreiben kann.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass man die Gerade g auch durch die Vorgabe eines Punktes A und eines Richtungsvektors $\vec{q}$ ($\vec{q} \neq \vec{0}$) beschreiben kann. Dazu ersetzt man in der Formel $(*)$ einfach $\vec{b} - \vec{a}$ durch $\vec{q}$:

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{q} \ .$$

b) <u>Normalebene zu einem Vektor durch einen Punkt</u>

Gegeben ist ein Punkt A und eine Richtung, dargestellt durch den (freien) Vektor $\vec{n}$. Gesucht ist die zu $\vec{n}$ normale Ebene durch A.

Zur Lösung dieser Aufgabe wählen wir wieder einen Nullpunkt O. Wie Sie der nachstehenden Skizze entnehmen können, liegt der Endpunkt R des Vektors $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ genau dann in der gesuchten Ebene, wenn $\vec{r} - \vec{a}$ (mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$) senkrecht auf $\vec{n}$ steht. Nach Bemerkung 4) von (1.8.c) ist dies aber genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\boxed{\vec{n}(\vec{r} - \vec{a}) = 0 \ .}$$

Die Punkte R der Ebene sind damit beschrieben.

c) Ebene durch drei Punkte

Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene, die wir vektoriell beschreiben möchten. Wir führen wie gewohnt einen Nullpunkt O ein und betrachten die drei Ortsvektoren

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{c} = \overrightarrow{OC}\ .$$

Der untenstehenden Skizze entnimmt man, dass die Differenzvektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$ in der gesuchten Ebene liegen. Im Hinblick auf die Lösung von Aufgabe b) bestimmen wir zunächst einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene. Da dieser sowohl zu $\vec{b} - \vec{a}$ als auch zu $\vec{c} - \vec{a}$ senkrecht stehen muss, setzen wir

$$\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\ .$$

Damit sind wir aber in der Situation von Aufgabe b): Der Punkt R liegt genau dann in der Ebene, wenn für $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ gilt:

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{a}) = 0 \quad \text{oder ausgeschrieben} \quad \Big((\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\Big)(\vec{r} - \vec{a}) = 0\ .$$

d) Parameterdarstellung einer Ebene

Die Aufgabe c) kann noch auf eine andere Weise angegangen werden. Wir führen dazu die Abkürzungen $\vec{p} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{q} = \vec{c} - \vec{a}$ ein. Wir stellen nun sofort fest, dass für jeden Punkt R in der durch A, B, C bestimmten Ebene E der Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ in der Form

$$(**) \qquad \vec{r} = \vec{a} + t\vec{p} + u\vec{q} \quad \text{mit} \quad t, u \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann und dass umgekehrt jeder so dargestellte Punkt R in der Ebene E liegt.

Damit haben wir eine weitere Art gefunden, eine Ebene vektoriell zu beschreiben. Im Unterschied zu b) und c) kommen in der beschreibenden Gleichung zwei reelle Zahlen vor, die man wie in a) Parameter nennt; die Beziehung $(**)$ heisst entsprechend *Parameterdarstellung der Ebene*. Da es sich bei einer Ebene um ein zweidimensionales Gebilde handelt, ist es ganz natürlich, dass hier — im Gegensatz zu a) — zwei Parameter auftreten.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Buch selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.